

Rodrigo Frehse Pereira

**Órbitas periódicas instáveis, sincronização de caos e
transientes em redes hiperbólicas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Co-orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto

Curitiba

2009

P436o

Pereira, Rodrigo Frehse

Órbitas periódicas instáveis, sincronização de caos e transientes em redes hiperbólicas / Rodrigo Frehse Pereira. – Curitiba, 2009.

105 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2009.

Orientador: Ricardo Luiz Viana – Co-orientador: Sandro Ely de Souza Pinto.

Bibliografia: p. 94-95.

1. Física. 2. Órbitas periódicas instáveis. 3. Tempo de sincronização.
I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz III. Pinto, Sandro Ely de Souza. IV. Título.

CDD: 521.3

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÍTULO “ÓRBITAS PERIÓDICAS INSTÁVEIS, SINCRONIZAÇÃO DE CAOS E TRANSIENTES EM REDES HIPERBÓLICAS”.

RODRIGO FREHSE PEREIRA

Em sessão pública iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição pela banca examinadora, esta decidiu atribuir ao candidato o conceito global A

Banca Examinadora

Assinatura

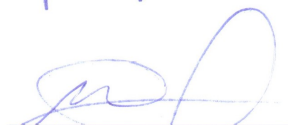
Conceito

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente) (UFPR)



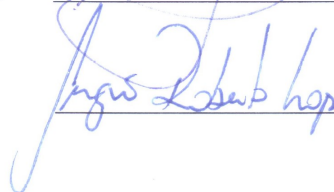
A

Prof. MARCUS ALOIZIO MARTINES DE AGUIAR
(IFGW)



A

Prof. SERGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)



A

Curitiba, 26 de fevereiro de 2009.

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do estudante **Rodrigo Frehse Pereira** são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é: *“Órbitas Periódicas Instáveis, Sincronização de Caos e Transientes em Redes Hiperbólicas”*.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2009.

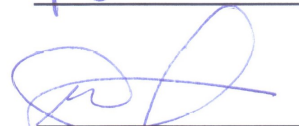
Banca Examinadora

Assinatura

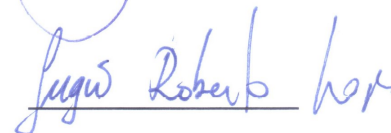
Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/ Presidente) (UFPR)



Prof. MARCUS ALOIZIO MARTINEZ DE AGUIAR
(IFGW)



Prof. SERGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)



Agradecimentos

- Ao meu avô, professor Nilceu Frehse, *in memoriam*, por ter me iniciado na vida acadêmica com as freqüentes visitas à sua modesta, mas sempre fascinate, biblioteca particular;
- Aos meus pais, Tadeu e Heloísa, pelo apoio e incentivo durante todo o desenvolvimento dessa dissertação;
- À minha namorada, Sabrina, pelo carinho, dedicação e paciência na correção do manuscrito e pela compreensão do tempo que o mestrado me consumiu;
- Ao Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação desse trabalho;
- Ao meu co-orientador, Dr. Sandro Ely de Souza Pinto, por minha formação acadêmica e pelas proveitosas discussões;
- À CAPES, pelo suporte financeiro;
- E, finalmente, mas não menos importante, aos engenheiros químicos da Syngenta, pelo desenvolvimento dos defensivos agrícolas Priori Xtra e Curyom.

*“Se uma coisa é muito difícil de fazer,
então não vale a pena tentar.”*

- Hommer J. Simpson

Resumo

As órbitas periódicas instáveis são o esqueleto sobre o qual a dinâmica caótica é construída. Imerso em uma sela ou atrator caótico, existe um conjunto infinito enumerável de tais órbitas. Esse conjunto infinito contável, embora possua medida de Lebesgue nula, suporta a medida natural dos atratores caóticos e o decaimento da medida para selas caóticas. Relações exatas e expansões em séries convergentes para quantidades dinâmicas fundamentais, tais como a entropia topológica e a taxa de escape, podem ser construídas em termos das órbitas periódicas instáveis para sistemas hiperbólicos. Nesse trabalho, um sistema caótico de alta dimensão foi analisado pelas ferramentas da teoria das órbitas periódicas. Mais especificamente, uma rede composta de diversos mapas de Bernoulli acoplados foi estudada. A hiperbolicidade dessa rede pode ser provada e, portanto, o formalismo das órbitas periódicas formalmente pode ser aplicado. A intensidade do acoplamento de cada par de sítios depende da distância entre eles na rede de acordo com uma lei de potência. As trajetórias típicas dessa rede podem exibir sincronização, desde que o estado sincronizado, dado por uma variedade unidimensional \mathcal{S} , seja estável. De modo a determinar a estabilidade local dessa variedade, o espectro de Lyapunov das trajetórias sincronizadas foi avaliado. A análise da estabilidade global desse estado foi calculada pela expressão para a medida natural em termos do conjunto denso de órbitas periódicas instáveis imersas em \mathcal{S} . Para os casos em que \mathcal{S} é globalmente estável, experimentos numéricos para o tempo de sincronização foram realizados. O comportamento errático e instável observado nas trajetórias do estado dessincronizado, bem como os tempos de sincronização médios muito longos, estabeleceram a hipótese sobre a existência de uma sela caótica \mathcal{G} no espaço de fase da rede. O decaimento exponencial temporal típico no número de trajetórias capturadas pela sela foi verificado, para o qual a taxa de escape pode ser calculada. As órbitas periódicas instáveis de \mathcal{G} foram numericamente determinadas pela implementação do método de transformação de estabilização e, então, a topologia da sela caótica pôde ser analisada. Uma vez que uma expressão analítica biunívoca para a associação simbólica às órbitas periódicas foi encontrada, a expansão em ciclos primos pôde ser formalmente aplicada e a taxa de escape de \mathcal{G} calculada. A exatidão dos resultados obtidos, quando comparados com o ajuste do decaimento exponencial das trajetórias, formalmente comprova a existência da sela caótica \mathcal{G} . Consequentemente, o tempo de sincronização médio é associado ao tempo de vida média da sela caótica imersa no espaço de fase da rede.

Palavras-chave: órbitas periódicas instáveis, sincronização de caos, sistemas hiperbólicos, tempo de sincronização, transientes caóticos, expansão em ciclos primos.

Abstract

Unstable periodic orbits are the skeleton upon which the chaotic dynamics is built. Embedded in a chaotic saddle or attractor, there is a denumerable infinite set of such orbits. This countable infinite set, although has zero Lebesgue measure, supports the natural measure of chaotic attractors and the measure decay for chaotic saddles. Exact relationships and convergent series expansions for fundamental dynamical quantities, such as topological entropy and escape rate, can be constructed in terms of unstable periodic orbits for hyperbolic systems. In this work, a high-dimensional chaotic system was analyzed by the tools of periodic orbit theory. More specifically, a lattice composed by several coupled Bernoulli maps was studied. This lattice hyperbolicity can be proved and, therefore, the periodic orbit formalism formally can be applied. The coupling intensity of each pair of sites depends on the lattice distance between them in a power-law fashion. Typical trajectories of such lattice can exhibit synchronization, provided that the synchronization state, given by a one-dimensional manifold \mathcal{S} , is stable. In order to determine the local stability of this manifold, the Lyapunov exponents of synchronized trajectories was evaluated. The global stability analysis of such state was computed by the natural measure expression in terms of the dense set of unstable periodic orbits embedded in \mathcal{S} . For the situations in which \mathcal{S} is globally stable, numerical experiments for the synchronization time were performed. The observed unstable and erratic behavior of the desynchronized state trajectories as well as the very long average synchronization times establish the hypothesis about the existence of a chaotic saddle \mathcal{G} in the lattice phase space. The typical temporal exponential decay in the number of trajectories trapped by the saddle was verified, for which the escape rate could be computed. The unstable periodic orbits of \mathcal{G} were numerically determined by the implementation of the stabilization transformation procedure and, therefore, the topology of the chaotic saddle could be analyzed. Since an analytical expression for the one-to-one symbolic association to the periodic orbits was found, the prime cycle expansion could be formally applied and the escape rate of \mathcal{G} computed. The correctness of the found results, when compared with the trajectories exponential decay fit, formally prove the existence of the chaotic saddle \mathcal{G} . Consequently, the average synchronization time is associated with the average lifetime of a chaotic saddle embedded in the lattice phase space.

Keywords: unstable periodic orbits, chaos synchronization, hyperbolic systems, synchronization time, chaotic transients, prime cycle expansion.

Conteúdo

1	Introdução.....	p. 1
1.1	O caos	p. 4
1.2	As redes de mapas caóticos acoplados	p. 7
2	Os sistemas caóticos.....	p. 12
2.1	A instabilidade e o caos	p. 13
2.2	A medida natural	p. 16
2.3	Os expoentes característicos	p. 17
2.3.1	O expoente de Lyapunov	p. 17
2.3.2	As entropias	p. 19
2.4	A sela caótica	p. 22
2.5	O operador de transferência e a dinâmica simbólica	p. 24
2.6	A hiperbolicidade	p. 27
3	As órbitas periódicas instáveis	p. 30
3.1	A medida natural em função das órbitas periódicas instáveis	p. 30
3.2	A taxa de escape em função das órbitas periódicas instáveis	p. 36
3.3	A detecção de órbitas periódicas	p. 38
3.4	A expansão em ciclos primos	p. 43
4	As redes hiperbólicas - a sincronização de caos	p. 48
4.1	As redes hiperbólicas de mapas caóticos acoplados	p. 49
4.2	As formas de acoplamento	p. 52

4.3	A sincronização	p. 54
4.3.1	A distância à variedade de sincronização	p. 54
4.4	A vizinhança linear da variedade de sincronização	p. 55
4.5	A estabilidade do estado sincronizado	p. 57
4.5.1	A estabilidade local - O espectro de expoentes de Lyapunov	p. 57
4.5.2	A estabilidade global - A medida natural	p. 60
5	As redes hiperbólicas - os transientes.....	p. 64
5.1	O tempo de sincronização	p. 64
5.2	A taxa de escape	p. 68
5.3	As órbitas periódicas instáveis da rede	p. 73
5.3.1	A expressão geral	p. 74
5.3.2	Detecção numérica	p. 78
5.4	A taxa de escape - expansão em ciclos primos	p. 84
6	Conclusões	p. 88
	Bibliografia	p. 94
	Apêndice A – Matrizes circulantes	p. 96

1 Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos é um ramo da matemática que trata da análise de equações parametrizadas por um escalar t , usualmente denominado *tempo*. Basicamente, para um dado sistema, busca-se determinar a solução $\mathbf{x}(t)$ que especifica o estado do sistema no tempo t . Normalmente, esse estado é também função de $\mathbf{x}(0)$, ou seja, a evolução temporal do sistema depende do ponto de partida, dito *condição inicial* de $\mathbf{x}(t)$. Caso cada condição inicial do sistema especifique *unicamente* uma solução, diz-se que tal sistema dinâmico é *determinístico*.

Os sistemas dinâmicos determinísticos estão presentes em todos os ramos da Física. Na Mecânica Clássica, o sistema estudado é composto pelas equações de Hamilton¹ e a solução desejada são as coordenadas generalizadas dos componentes do problema em termos do tempo t e da configuração inicial. A evolução temporal dessas soluções definem trajetórias no espaço de fase $2N$ -dimensional, sendo N o número de graus de liberdade do problema. Na Mecânica Quântica, embora a função de onda² $\Psi(\mathbf{x}, t)$ possua uma interpretação probabilística, essa é obtida através da solução da equação de Schrödinger. Como essa equação e $\Psi(\mathbf{x}, 0)$ determinam unicamente $\Psi(\mathbf{x}, t)$, a equação de Schrödinger define um sistema dinâmico determinístico em um espaço de fase de dimensão infinita: o espaço de Hilbert. Portanto, a descrição física de diversos fenômenos naturais depende dos resultados provenientes da teoria de sistemas dinâmicos.

O modo como a solução $\mathbf{x}(t)$ de um sistema dinâmico, dado por

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \Phi_\tau \mathbf{x}(t), \quad (1.1)$$

¹Ou, equivalentemente, as equações de Euler-Lagrange, ou ainda, as equações de Newton.

²Identicamente para a função de onda no espaço dual dos momentos.

sendo Φ_τ um operador de evolução temporal, é obtida, depende, e muito, da forma de Φ_τ . Especialmente, quando Φ_τ representa um operador não-linear, a solução $\mathbf{x}(t)$ em termos de $\mathbf{x}(0)$ pode ser muito difícil de se obter. A não-linearidade do operador de evolução temporal do sistema (1.1) possibilita o surgimento de soluções extremamente complexas: soluções caóticas. A teoria matemática desenvolvida para a análise desses sistemas é conhecida como Teoria da Dinâmica Não-Linear. Nessa teoria, apenas sistemas dinâmicos determinísticos e não-lineares são considerados. Uma vez que a equação de Schrödinger é linear em $\Psi(\mathbf{x}, t)$, a teoria do caos não trata dos sistemas dinâmicos determinados pela Mecânica Quântica³.

A história da teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares funde-se com a da Mecânica Clássica, mais especificamente, com a mecânica celeste, pois foi Poincaré, em 1890, o primeiro a notar o mecanismo topológico que leva a soluções caóticas enquanto estudava a estabilidade do problema de três corpos. No princípio, a existência de caos em um sistema foi tratada, pelos físicos, como uma aberração do modelo, algo que deveria ser evitado. Já os matemáticos, dentre eles Birkhoff, Lyapunov, Andronov e Arnold, iniciaram na primeira metade do século XX o desenvolvimento de ferramentas para a análise de soluções caóticas, com introdução de métodos de análise qualitativa de equações diferenciais ⁽¹⁾. Vale ressaltar aqui que o operador Φ_τ em (1.1) pode representar tanto a evolução temporal para $\tau \in \mathbb{R}$, ou seja, para tempos contínuos, ou para tempos discretos, $\tau \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, o operador Φ_τ define um *fluxo*, enquanto que no segundo, define um *mapa*. Poincaré desenvolveu, durante seu estudo do problema de três corpos, uma ferramenta que se tornou fundamental no estudo de sistemas caóticos: a seção de Poincaré. Essa ferramenta permite a determinação de um mapa d -dimensional, dito mapa de Poincaré, a partir de um fluxo de dimensão $d + 1$, através da definição de uma seção Υ conveniente, d -dimensional no espaço de fase do fluxo. O mapa então é dado por um operador a tempo discreto, Φ_τ , tal que sua solução resulta nos cruzamentos da solução do fluxo original com a superfície Υ , como está ilustrado na figura 1.1. Embora a forma do mapa obtido dependa da escolha de Υ , pois a posição dos cruzamentos dependem da forma e localização da seção, as propriedades métricas e topológicas do sistema são invariantes quanto à escolha de tal seção.

³Entenda-se aqui que esta afirmação se refere à “velha” Mecânica Quântica, existem diversas equações de onda não-lineares presentes na Mecânica Quântica “contemporânea”.

Para sistemas fortemente caóticos, qualquer hiper-superfície d -dimensional suave é igualmente adequada para a obtenção do mapa de Poincaré ⁽²⁾. Nos casos em que não se pode verificar a condição de caos forte, a escolha de Υ deve ser empiricamente motivada: a seção deve ser determinada de modo a gerar o máximo de interseções com a solução original do fluxo. Assim, em princípio, a análise realizada para um fluxo $(d + 1)$ -dimensional é válida para mapas d -dimensionais e vice-versa.

Na segunda metade do século XX, a Teoria da Dinâmica Não-Linear voltou a se fundir à Física com as contribuições de Lorenz, em 1963, que observou o comportamento aperiódico em um sistema de equações simplificado para o modelamento atmosférico e, um pouco mais tarde, com Ruelle e Takens que, em 1971, associaram ao caos a turbulência em fluidos. Desde então, a teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares tem caminhado, lado a lado, com o desenvolvimento da Física.

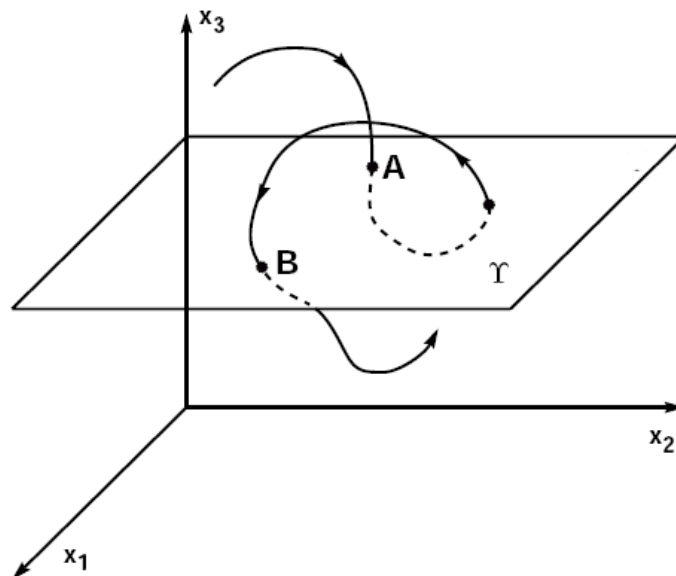


Figura 1.1: A linha representa uma solução de um dado fluxo representada no espaço de fase tridimensional. Também estão ilustrados uma seção de Poincaré Υ e os pontos que seriam determinados pelo mapa de Poincaré. Fonte: Alligood *et. al.* ⁽²⁾.

Outro fato importante, que também ocorreu na década de 1970, foi o início do desenvolvimento de computadores pessoais com alto poder de processamento⁴. A simulação com-

⁴Computadores comerciais, que custavam muitas vezes menos que os super-computadores à valvula que existiam na época. É claro que, o “alto poder de processamento” de três décadas atrás é comparável com o das calculadoras científicas que dispomos hoje.

putacional tornou-se, portanto, mais uma ferramenta para a análise dos sistemas caóticos, ou não-lineares, de um modo geral. Isso permitiu um avanço significativo na observação de novos fenômenos associados ao caos, pois comportamentos assintóticos de sistemas não-lineares poderiam ser investigados em minutos, através da solução numérica da equação (1.1). Mas deve-se ressaltar que, devido à instabilidade e à complexidade, essa abordagem não fornece, de modo geral, todo o conhecimento sobre as soluções do sistema, e sim apenas do caso especial numericamente investigado. Do ponto de vista prático, muitas vezes, esse resultado já é suficiente, mas do ponto de vista teórico, geralmente acrescenta muito pouco, quando nada. Assim, embora forneça uma ferramenta bastante útil, o desenvolvimento dos microcomputadores acarretou um retardo no avanço da teoria de Sistemas Dinâmicos. A idéia geral que deve ser seguida para a pesquisa em sistemas dinâmicos e que motivou o desenvolvimento dessa dissertação pode ser resumida parafraseando-se Guckenheimer e Holmes, pág. ix ⁽¹⁾:

“Uma observação um pouco tendenciosa, na qual, porém, contém alguma verdade, é que matemáticos puros tendem a pensar em alguma propriedade interessante (ou estranha) e então construir um sistema dinâmico cujas soluções a exibam. Em contraste, a regra tradicional dos engenheiros ou matemáticos aplicados é considerar um dado sistema (talvez um modelo que ele ou ela tenha construído) e encontrar quais são suas propriedades. Nós principalmente adotamos o segundo ponto de vista, mas a nossa exposição pode parecer, às vezes, esquizofrênica, pois estamos apresentando idéias do primeiro grupo em problemas do segundo. Ainda, nós percebemos que as propriedades de um sistema específico não podem ser descobertas a menos que se saiba quais são as possibilidades, e, muitas vezes, essas são reveladas apenas pela teoria geral abstrata. A teoria e a prática progridem melhor de mãos dadas.”

1.1 O caos

O conceito de caos já não é estranho aos físicos, uma vez que na maioria dos livros modernos de Mecânica Clássica, esse assunto é abordado com bastante relevância - como por

exemplo a ref. ⁽³⁾. Isso porque o comportamento caótico está presente em diversas situações físicas. Seja

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \quad (1.2)$$

uma realização para o operador Φ_1 em (1.1), tal que $\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ define um mapa, sendo $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ o seu espaço de fase. Diz-se que (1.2) é um mapa caótico quando \mathbf{g} apresenta sensibilidade às condições iniciais em todo seu domínio ω , isto é, para todo $\mathbf{x}_0 \in \omega$ existe um $\varepsilon > 0$, tal que, para cada $\delta > 0$, existe um $\mathbf{x}'_0 \in \omega$ e um $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0\| < \delta \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n\| > \varepsilon, \quad (1.3)$$

sendo \mathbf{x}_n e \mathbf{x}'_n dados recursivamente por (1.2) ⁽⁴⁾ e $\|\cdot\|$ uma norma conveniente.

Uma das principais características de um sistema caótico é que, por definição, a determinação do vetor de estado \mathbf{x}_n a partir de \mathbf{x}_0 será, necessariamente, incerta por pelo menos um fator ε , para qualquer precisão finita δ na determinação do estado inicial \mathbf{x}_0 . Essa precisão δ pode representar tanto a limitação em uma medida experimental ou a precisão utilizada em uma simulação computacional. Ou seja, se um sistema é caótico, a previsibilidade formalmente garantida para sistemas determinísticos fica comprometida, principalmente para longos tempos n .

Mas isso não significa que, se um modelo é caótico, então “o mundo está perdido”. Muita informação ainda pode ser extraída do modelo, embora não seja possível saber exatamente qual será o seu estado \mathbf{x}_n para $n \gg 1$. Suponha que as soluções de (1.2) permaneçam limitadas para qualquer tempo n . Caso isso não ocorra, não há problema de previsibilidade, pois sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \infty$. Como as soluções limitadas devem satisfazer sempre (1.3), essas devem estar continuamente se afastando entre si, mas contidas em uma região limitada do espaço de fase. Isso só é possível se as soluções estiverem confinadas em uma região $\mathcal{A} \subset \omega$ que possua uma estrutura fractal ⁽⁵⁾. Diz-se então que \mathcal{A} é o *atrator caótico* de (1.2)⁵ Assim, embora não se saiba a exata posição de \mathbf{x}_n em ω , sabe-se que $\mathbf{x}_n \in \mathcal{A}$. A análise de sistemas caóticos é então realizada em função da observação que esses são ergódicos, ou seja, para

⁵Note que a condição de que *todas* as soluções do mapa finalmente são restritas à \mathcal{A} foi imposta, bem como que o mapa (1.2) goza de sensibilidade às condições iniciais em ω , condição (1.3).

qualquer função teste $\varphi(\mathbf{x})$, é verdade que ⁽⁶⁾

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \varphi(\mathbf{x}_t) = \int_{\mathcal{A}} \varphi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

sendo $d\mu(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ e $\mu(\mathcal{A})$ a medida natural do atrator \mathcal{A} . A notação $\mu(\mathbf{x})$ se refere à medida do subconjunto $C = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{\mathbf{y} \in \omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta\}$ ⁽⁷⁾. Essa medida representa a frequência com que a vizinhança de \mathbf{x} é alcançada pela evolução temporal de uma condição inicial \mathbf{x}_0 típica e arbitrária. Portanto, mesmo sendo impossível determinar \mathbf{x}_n , para $n \gg 1$ e com precisão finita, a ergodicidade dos atratores caóticos permite que qualquer quantidade de interesse possa ser extraída do sistema a partir de (1.4), desde que $\mu(\mathbf{x})$ seja conhecida.

A expressão (1.4) foi definida como sendo válida para condições iniciais típicas. Esse conceito refere-se a pontos \mathbf{x}_0 contidos em um conjunto de medida de Lebesgue não-nula. Um conjunto de medida de Lebesgue d -dimensional nula é aquele que pode ser coberto⁶ por uma união de caixas d -dimensionais, cujos volumes são arbitrariamente pequenos ⁽⁸⁾. As condições impostas para que \mathcal{A} seja um conjunto caótico requerem \mathbf{g} não-linear, resultando no comportamento errático tipicamente observado nos sistemas caóticos. Mas essas mesmas condições implicam a existência de soluções para (1.2) dadas por

$$\mathbf{x}_{n+p} = \mathbf{g}^{(p)}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n, \quad (1.5)$$

sendo que a notação $\mathbf{g}^{(p)}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{g} \circ \dots \circ \mathbf{g}(\mathbf{x})$ (p composições) foi utilizada. Isto é, a cada p tempos, o sistema retorna ao mesmo estado inicial \mathbf{x}_n . Diz-se que um ponto \mathbf{x}_n que satisfaz (1.5) é um ponto de período p , ou p -periódico de (1.2). O conjunto de p pontos dados pelas sucessivas aplicações do mapa $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ em \mathbf{x}_n define a *órbita periódica* de \mathbf{x}_n :

$$\{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+(p-1)}\} \equiv \{\mathbf{x}_{n+k}\}_{k=0}^{p-1}. \quad (1.6)$$

Note que (1.6) é uma solução do mapa (1.2) que viola a requisição aperiodicidade. E, de fato, existem infinitas soluções da forma de (1.6) contidas em \mathcal{A} ⁽⁵⁾, mas essas nunca são diretamente observadas, pois o conjunto de *todas* as órbitas periódicas forma um conjunto de medida de Lebesgue nula e, portanto, são ditos *pontos atípicos* do mapa.

⁶No sentido de estar contido.

A determinação da medida natural de um atrator caótico torna-se, então, o objetivo principal da análise de um sistema caótico, pois o conhecimento de $\mu(\mathcal{A})$ permite o cálculo da média temporal de qualquer quantidade $\varphi(\mathbf{x})$ sobre *qualquer* trajetória típica do sistema a partir de (1.4). Nesta dissertação, uma metodologia poderosa para a determinação da medida natural de um atrator caótico será investigada em detalhes. Basicamente, a relação ⁽⁷⁾

$$\mu(\mathcal{A}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \frac{1}{L(\mathbf{x})} \equiv 1 \quad (1.7)$$

será explorada, sendo que o somatório se estende sobre todos os pontos p -periódicos contidos em \mathcal{A} e $L(\mathbf{x})$ é uma função que quantifica a instabilidade do ponto \mathbf{x} – mais detalhes serão expostos no capítulo 3. Note que $\mu(\mathcal{A}) = 1$ refere-se ao fato que \mathcal{A} é o único atrator caótico de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Percebe-se da expressão (1.7) que, embora os pontos periódicos formem um conjunto de medida nula, as órbitas periódicas suportam a medida natural de um atrator caótico. Como de posse de $\mu(\mathcal{A})$ e da equação (1.4) toda informação de um sistema caótico pode ser obtida, a equação (1.7) revela que um conjunto instável de medida nula contém toda a informação da dinâmica caótica em \mathcal{A} .

A investigação da igualdade (1.7) é conhecida como a teoria de órbitas periódicas instáveis. No capítulo 3, a derivação dessa expressão, bem como diversos resultados provenientes da mesma, serão apresentados. Deve-se notar que se todas⁷ as órbitas periódicas contidas em um subconjunto $\mathcal{B} \subset \omega$ são conhecidas bem como seus coeficientes de estabilidade $L(\mathbf{x})$, então a verificação de que $\mu(\mathcal{B}) = 1$ através de (1.7) informa que, necessariamente, \mathcal{B} contém um atrator caótico que é o *único* estado assintótico do sistema estudado. Esse resultado será essencial para a determinação da estabilidade global de um conjunto, realizada no capítulo 4.

1.2 As redes de mapas caóticos acoplados

Como foi discutido no início desse capítulo, a criação puramente abstrata de um sistema dinâmico que goze de algumas propriedades é uma prática comum na teoria de Sistemas Dinâmicos, justificada por criar um suporte para a análise de problemas de interesse prático.

⁷Embora o número de órbitas periódicas instáveis seja infinito, essas formam um conjunto infinito contável ⁽⁴⁾.

Nesse sentido, a construção de um sistema Ld -dimensional dado por

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_n) \equiv \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{y}_n), \quad (1.8)$$

sendo $\mathbf{y}_n \in \Omega$ um vetor Ld -dimensional e $\mathbf{G}(\mathbf{y})$ uma função vetorial, dados por

$$\mathbf{y}_n \stackrel{\circ}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^{(0)} \\ \mathbf{x}_n^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(L-1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(\mathbf{y}_n) \stackrel{\circ}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}_n^{(0)}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_n^{(1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_n^{(L-1)}) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

$\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ um mapa caótico d -dimensional, \mathbf{A} uma matriz $Ld \times Ld$ real e constante, tal que,

$$\sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{A}]_{k,m+ld} = 1, \quad (\forall k, m) \quad (1.10)$$

não necessitaria de uma justificativa física. Em (1.10), $[\mathbf{A}]_{a,b}$ representa o componente da linha a e coluna b de \mathbf{A} , e a condição indicada garante que o espaço de fase de (1.8) seja dado por

$$\Omega = \omega \otimes \omega \otimes \cdots \otimes \omega = \omega^L. \quad (1.11)$$

Nota-se que, por construção, a equação (1.8) forma um sistema caótico de alta dimensionalidade⁸. A análise dinâmica desse sistema certamente contribuiria para a teoria de sistemas dinâmicos e, de maneira indireta, para todas as aplicações dessa teoria nos mais diversos ramos da Física. Mas o sistema definido pela expressão (1.8) possui mais de uma motivação de cunho prático.

Desde que \mathbf{A} não seja a matriz identidade, o sistema dado por (1.8) define uma *rede de mapas caóticos acoplados*. A cada instante de tempo n , cada componente do vetor de estado \mathbf{y} evolui segundo o mapa caótico \mathbf{g} e, então, é composto de uma combinação linear de todos os outros componentes:

$$y_{n+1}^{(k)} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{d-1} [\mathbf{A}]_{k,m+ld} g_m(\mathbf{x}_n^{(l)}), \quad (1.12)$$

⁸Para valores altos de L .

sendo $g_m(\mathbf{x})$ dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \doteq \begin{bmatrix} g_0(\mathbf{x}) & g_1(\mathbf{x}) & \cdots & g_{d-1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \quad (1.13)$$

e T denotando transposição. Assim, a cada passo de tempo n , a evolução temporal de $\mathbf{x}^{(m)}$ é influenciada pelos $(L-1)$ outros mapas $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Diz-se, portanto, que a matriz \mathbf{A} define o acoplamento entre os L mapas $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. O sistema (1.8) é denominado uma rede, pois pode-se imaginar que cada mapa $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ determina a dinâmica em uma localização espacial bem definida, um *sítio*. Uma rede de mapas acoplados é formada de dois componentes essenciais: o mapa caótico $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, que define a dinâmica local em um sítio, e a conectividade entre os sítios, determinada por \mathbf{A} .

Uma rede de mapas da forma (1.8) pode ser obtida a partir da discretização espaço-temporal de uma equação diferencial parcial, como a que rege a dinâmica de um fluido, por exemplo ⁽⁹⁾. Dentre os diversos fenômenos dinâmicos que uma rede de mapas acoplados podem apresentar, como a supressão de caos, intermitência e estruturas fractais de alta dimensionalidade, a possibilidade de sincronização de caos e as condições para que essa ocorra formam o objeto de estudo dessa dissertação.

A sincronização de caos é definida pela uniformidade espacial dos componentes da rede, ou seja, quando todos os sítios encontram-se *exatamente* no mesmo estado,

$$\mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{x}_n^{(1)} = \cdots = \mathbf{x}_n^{(L-1)}.$$

Diz-se, então, que a rede (1.8) está sincronizada no tempo n . Um fato interessante, que chamou a atenção da comunidade científica para o estudo de redes de mapas caóticos acoplados, foi a observação de que essas redes, a despeito da natureza caótica da dinâmica local, podem apresentar sincronização ⁽⁹⁾. Ou seja, mesmo para uma condição inicial \mathbf{y}_0 dada por

$$\mathbf{x}_0^{(k)} \neq \mathbf{x}_0^{(l)}, \quad (\forall k, l) \quad (1.14)$$

a evolução temporal de (1.8) pode resultar em sincronização para $n > 0$.

Existem diversas maneiras de se estudar a sincronização em redes de mapas acoplados, como por exemplo através de uma abordagem envolvendo a troca de informação entre os sítios,

utilizando-se do ferramental fornecido pela Teoria da Informação ⁽⁹⁾. Outra metodologia, dada pela análise geométrica do espaço de fase Ω , consiste em estudar a sincronização em termos da estabilidade das soluções sincronizadas. Para isso, define-se a variedade de sincronização,

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{y} \in \Omega : \mathbf{x}_n^{(k)} = \mathbf{x}_n^{(l)} \forall k, l\}, \quad (1.15)$$

e estuda-se a estabilidade transversal de \mathcal{S} , ou seja, se perturbações transversais à \mathcal{S} são propagadas ou amortecidas pela evolução temporal da rede. Perceba que, por construção, a dinâmica em \mathcal{S} é caótica e determinada por $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Nessa dissertação, o critério geométrico para a estabilidade será investigado.

No capítulo 4, os conceitos envolvendo a sincronização e a estabilidade do estado sincronizado, definido por (1.15), serão formalmente expostos e exemplificados. As condições para que \mathcal{S} seja localmente estável serão derivadas a partir da estabilidade linear, enquanto que a estabilidade global do estado sincronizado será analisada a partir do conjunto de órbitas periódicas instáveis imersos em \mathcal{S} e da relação (1.7) entre essas órbitas e a medida natural do conjunto que as contém.

Recentemente, Cencini e Torcini ⁽¹⁰⁾ investigaram numericamente uma realização do sistema (1.8), exposta na seção 4.2 dessa dissertação. Eles argumentaram que, apesar de \mathcal{S} ser linearmente estável, a sincronização não era observada. Com base em suas observações, eles concluíram que a análise linear da estabilidade do estado sincronizado não é suficiente para caracterizar a sincronização para uma certa classe de dinâmica local, a saber: mapas fortemente não-lineares possuindo uma descontinuidade ou mapas contínuos com regiões de derivada com valores muito altos. No capítulo 4, utilizando o ferramental para a análise métrica e topológica de sistemas caóticos desenvolvido nos capítulos 2 e 3, será mostrado que, para a rede estudada na referência ⁽¹⁰⁾, as condições para a estabilidade linear e global de \mathcal{S} coincidem e, portanto, a análise da estabilidade linear, nesse caso, é *suficiente* para se observar a sincronização.

Uma vez determinadas as condições para que a sincronização ocorra, diversas simulações numéricas são apresentadas no capítulo 5, ilustrando como a rede evolui de um estado \mathbf{y}_0 des-sincronizado para o estado $\mathbf{y}_n \in \mathcal{S}$ sincronizado. O tempo n necessário para se observar a

sincronização, denominado *tempo de sincronização*, será então investigado.

Seja Σ a vizinhança linear de \mathcal{S} definida por

$$\Sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{\mathbf{y} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{y}, \mathcal{S}) < \delta\} \quad (1.16)$$

e seja Γ a região do espaço de fase dada por

$$\Gamma = \Omega - \Sigma. \quad (1.17)$$

Quando \mathcal{S} é globalmente estável, tem-se $\mu(\Sigma) = 1$ e, obviamente, $\mu(\Gamma) = 0$, pois, por definição, $\mu(\Omega) = 1$. O tempo de sincronização é então definido como o menor inteiro t_s tal que se $\mathbf{y}_0 \in \Gamma$, então $\mathbf{y}_{t_s} \in \Sigma$. A discrepância entre os resultados aqui apresentados com os obtidos por Cencini e Torcini⁽¹⁰⁾ será então explicada em termos da enunciação e comprovação da seguinte hipótese:

Hipótese: A observação de longos tempos de sincronização ou, mais especificamente, de longos tempos de sincronização médio, $\langle t_s \rangle$, é devido à existência de uma sela caótica $\mathcal{G} \subset \Gamma$, cuja entropia topológica é menor, mas muito próxima, que a entropia topológica do estado sincronizado. Assim, a evolução de \mathbf{y}_k errática em Γ para $0 \leq k < t_s$ é caótica, mas possui duração finita, i. e., $t_s < \infty$.

A verificação dessa hipótese, dada no capítulo 5, também é feita em termos das órbitas periódicas instáveis da rede, mas agora considerando aquelas contidas em Γ . Os pormenores de como tais órbitas são detectadas estão indicados na seção 5.3. Por fim, será demonstrado que todas as soluções típicas de (1.8) finalmente sincronizam se \mathcal{S} é localmente estável, sendo os resultados observados⁽¹⁰⁾ equivocados devido à subestimação do tempo necessário para a sincronização nas simulações numéricas.

2 Os sistemas caóticos

Neste capítulo, serão apresentados alguns fundamentos matemáticos para o tratamento de sistemas caóticos. De modo algum pretende-se fazer uma exposição completa da teoria, sendo essa limitada às propriedades utilizadas na análise realizada nos capítulos subsequentes. Por isso, apenas sistemas dinâmicos a tempo discreto serão utilizados, ou seja, a evolução temporal da variável de estado $\mathbf{x}_0 \in \omega$ é determinada por um mapa d -dimensional $\mathbf{F} : \omega \rightarrow \omega$ de modo que

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (2.1)$$

sendo $n \in \mathbb{N}$ o tempo discreto e $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ o espaço de fase em que o mapa \mathbf{F} é definido. Isso porque mapas são mais fáceis de tratar, tanto numericamente quanto analiticamente, e podem apresentar caos em baixa dimensão. Por exemplo, se \mathbf{F} for não invertível, é possível que a dinâmica de (2.1) seja caótica mesmo para $d = 1$. As ilustrações das definições e propriedades dadas nesse capítulo envolverão, portanto, o mapa de Bernoulli – definido na próxima seção – que é unidimensional. Como nos capítulos 4 e 5 será realizada a análise dinâmica de sistemas L -dimensionais compostos de L mapas de Bernoulli acoplados, os exemplos aqui apresentados representam parte do desenvolvimento proposto para essa dissertação.

Embora a imensa maioria dos problemas de interesse físico envolvam fluxos, isto é, sistemas dinâmicos definidos por equações diferenciais ordinárias, a teoria desenvolvida para mapas é de grande valia, pois, em princípio, pode-se sempre construir um mapa de Poincaré apropriado e se obter um mapa $(d - 1)$ -dimensional de um fluxo d -dimensional. Quando não indicado o contrário, as definições e resultados indicados formam uma versão compilada do conteúdo presente nas Refs. ^(2,4,5,8,11).

2.1 A instabilidade e o caos

Dois componentes essenciais estão presentes na dinâmica caótica: instabilidade e aperioidicidade. A instabilidade é tipicamente caracterizada pela divergência exponencial de duas trajetórias inicialmente próximas com a evolução temporal do sistema. O exemplo mais simples possível de um sistema instável é dado pelo mapa unidimensional

$$x_{n+1} = \beta x_n, \quad (2.2)$$

sendo $x_0 \in \omega = \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. A figura 2.1(a) representa uma simulação do mapa (2.2), com $\beta = 3$, para duas condições iniciais muito próximas. É evidente que as trajetórias divergem ao infinito e, também, a distância entre ambas, indicada por Δx_n na figura 2.1(a). Apenas as primeiras 10 iteradas de (2.2) estão indicadas para evidenciar a divergência inicial das trajetórias.

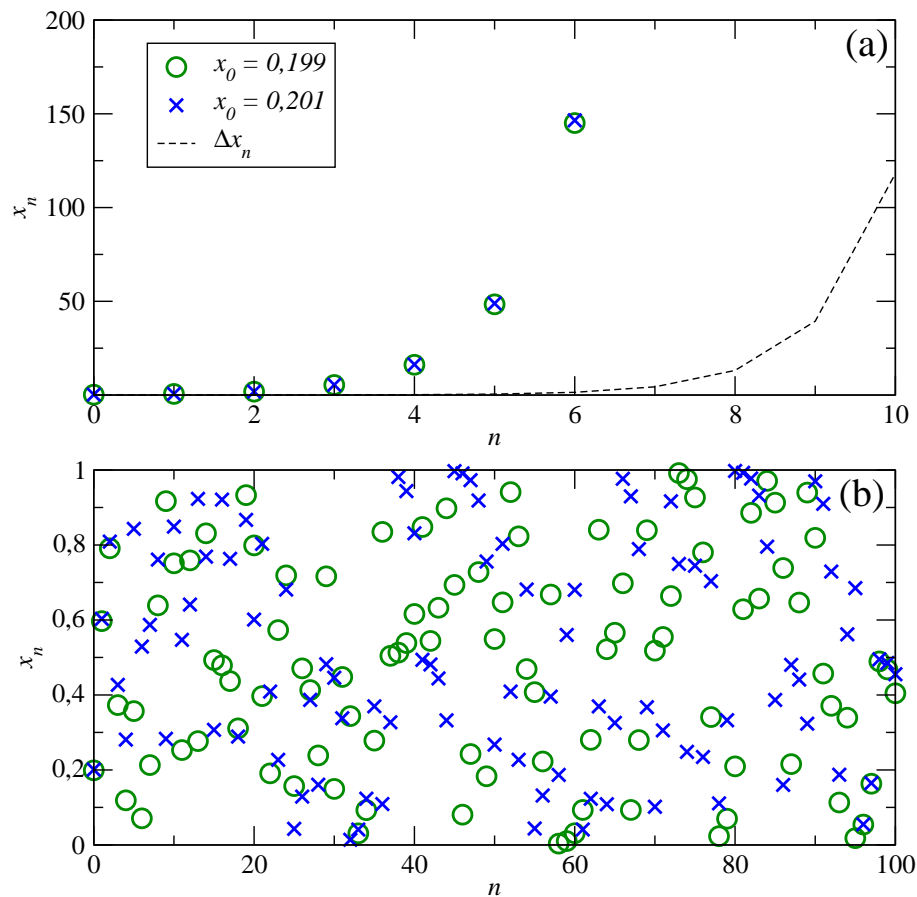


Figura 2.1: (a) Os primeiros pontos da série temporal do sistema instável (2.2), com $\beta = 3$. A linha tracejada indica a distância entre as duas trajetórias. (b) A série temporal do mapa de Bernoulli (2.5) para as mesmas condições iniciais e parâmetros da figura (a). As trajetórias são agora instáveis e aparentemente aleatórias.

Deve-se notar que a instabilidade do mapa (2.2) não gera nenhuma imprevisibilidade, pois é direto de (2.2) que

$$\Delta x_n = \beta^n, \quad (2.3)$$

por simples substituição. Assim, a evolução temporal de apenas uma trajetória já fornece o resultado de todas as trajetórias possíveis. Caso se deseje o n -ésimo valor de uma trajetória iniciada em y_0 , basta calcular

$$y_n = \beta^n \pm x_n, \quad (2.4)$$

sendo o sinal \pm dado pelo sinal de $(y_0 - x_0)$. Portanto, apenas a instabilidade não gera caos.

A aperiodicidade pode ser obtida em (2.2) ao se alterar o espaço de fase $\omega = \mathbb{R}$ para um toro unidimensional $\omega = \mathbb{T} = [0, 1)$ ⁽²⁾. Assim, a variável x_n de estado pode ser considerada como um ângulo. Uma maneira conveniente de se escrever o mapa (2.2) restrito ao toro ω é

$$x_{n+1} = \beta x_n \bmod 1, \quad (2.5)$$

sendo que $a \bmod b$ representa a operação

$$a \rightarrow 0 \leq a + kb \leq 1. \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.6)$$

O mapa (2.5) é denominado deslocamento de Bernoulli ou mapa de Bernoulli e desempenha uma importante função para a teoria de sistemas caóticos ⁽⁴⁾. Uma ilustração de como as trajetórias do mapa de Bernoulli evoluem no tempo está indicada na figura 2.1(b), na qual $\beta = 3$ foi utilizado e as mesmas condições iniciais da figura 2.1(a) foram tomadas. A instabilidade continua evidente, pois já nas primeiras iteradas as trajetórias rapidamente se distanciam. Nota-se, porém, que a limitação do espaço de fase no toro \mathbb{T} introduziu o caráter errático e aperiódico nas trajetórias de (2.5).

A figura 2.2 representa a ação do mapa (2.5) para diferentes valores de β . Nessa monografia, por razões que ficarão claras nas próximas seções, valores fracionários para β

também serão considerados. O que fica evidente na figura 2.2, na qual

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618, \quad (2.7)$$

é que para qualquer $\beta > 1$, existem pontos $x \in \omega$ com mais de uma pré-imagem, ou seja, existem y_k tais que

$$x = \beta y_k \bmod 1,$$

com $k > 1$. Logo, para qualquer valor de β tal que o (2.5) é instável, o mapa de Bernoulli é não invertível e, portanto, pode apresentar caos unidimensional. A não-linearidade dos mapas de Bernoulli pode ser vista de duas formas: através da existência das descontinuidades, localizadas em $x = a/\beta$, sendo a determinado por (2.6) com $b = 1$, ou através da observação que (2.5) é um mapa contínuo em um espaço unidimensional não Euclidiano e não-linear, o toro \mathbb{T} . De qualquer modo, o mapa de Bernoulli possui todos os pré-requisitos para apresentar caos. A caoticidade de (2.5) será verificada na seção 2.5, com o auxílio da dinâmica simbólica.

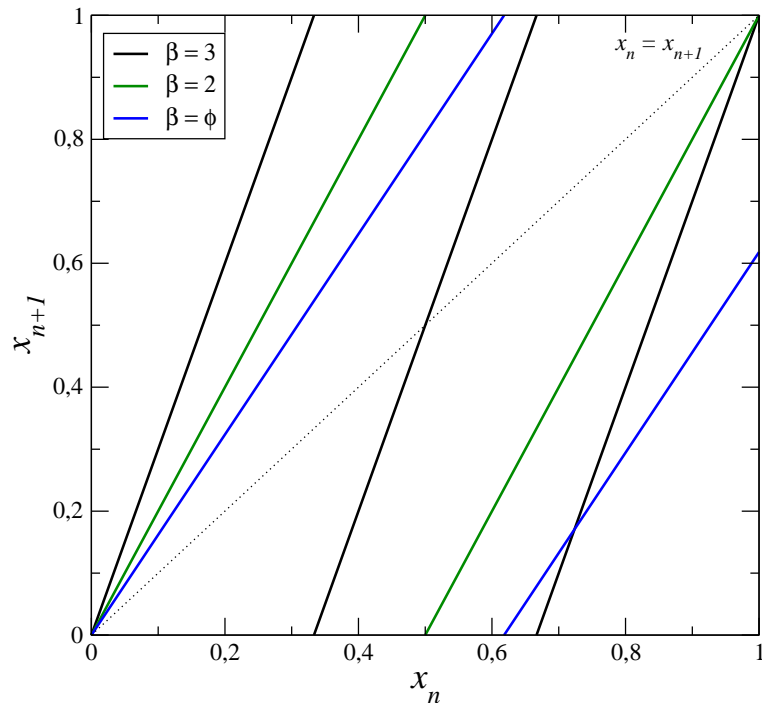


Figura 2.2: A ação do mapa de Bernoulli, equação (2.5), para diferentes valores de β .

2.2 A medida natural

Como foi argumentado na introdução, devido à instabilidade e aperiodicidade das soluções de um sistema caótico, muitas vezes, é conveniente abandonar o conceito de trajetória e substituí-lo pelo conceito de medida. Para fins práticos, ambas as abordagens fornecem o mesmo resultado referente às quantidades médias do sistema, devido à ergodicidade dos sistemas caóticos ⁽⁶⁾, expressa por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \varphi(\mathbf{x}_t) = \int_{\mathcal{A}} \varphi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

sendo $\varphi(\mathbf{x})$ uma função teste arbitrária, $\mathcal{A} \subset \omega$ o conjunto caótico considerado e $\mu(\mathbf{x})$ a medida natural do subconjunto $\mathcal{A} \supset C = \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \{\mathbf{y} \in \omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \mathbf{x}\}$. A medida natural pode ser definida da seguinte maneira ⁽²⁾:

Definição 1 A medida natural $\mu(A)$ de um conjunto $A \subseteq \omega$ é dada por

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\#\{\mathbf{x}_k : \text{dist}(\mathbf{x}_k, A) < r\}_{k=0}^{n-1}}{\#\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{n-1}} \quad (2.9)$$

para qualquer \mathbf{x}_0 típico em ω .

Na expressão (2.9), a notação $\#\{\dots\}$ significa o número de elementos do conjunto $\{\dots\}$. Portanto, por definição, a medida natural de uma região A do espaço de fase ω representa a fração de tempo que uma trajetória visita A ou suas vizinhanças. Devido ao caráter aparentemente aleatório das soluções de um sistema caótico, $\mu(A)$ pode ser interpretado como a probabilidade de se encontrar uma trajetória típica em A em um dado instante de tempo n . Observe que, por definição, essa probabilidade já é normalizada, pois $\mu(\omega) = 1$.

A medida natural é associada a uma densidade de trajetórias por

$$d\mu(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.10)$$

A densidade $\rho(\mathbf{x})$ pode ser numericamente estimada através de um histograma de frequência da evolução temporal de diversas¹ condições iniciais aleatoriamente escolhidas em ω . A densidade

¹A rigor, devido à ergodicidade, apenas uma trajetória com $n \rightarrow \infty$ é suficiente. O conjunto de trajetórias aleatórias é tomado para se compensar n finito.

das trajetórias do mapa de Bernoulli foi estimada dessa maneira, para diferentes valores de β , e está indicada na figura 2.3. Nota-se que $\rho(x)$ é uma função constante por partes, para todos os valores de β indicados. Especialmente para $\beta \in \mathbb{N}$, essa densidade é constante e igual a um para todo $x \in [0, 1)$. A comprovação desse resultado foi reservada ao capítulo seguinte, na seção 3.1. Note que, apesar de $\beta = \phi$ ser o número mais irracional que existe ⁽¹²⁾, a densidade $\rho(x)$ apresenta apenas dois patamares possíveis. Esse resultado será explorado na seção 2.5.

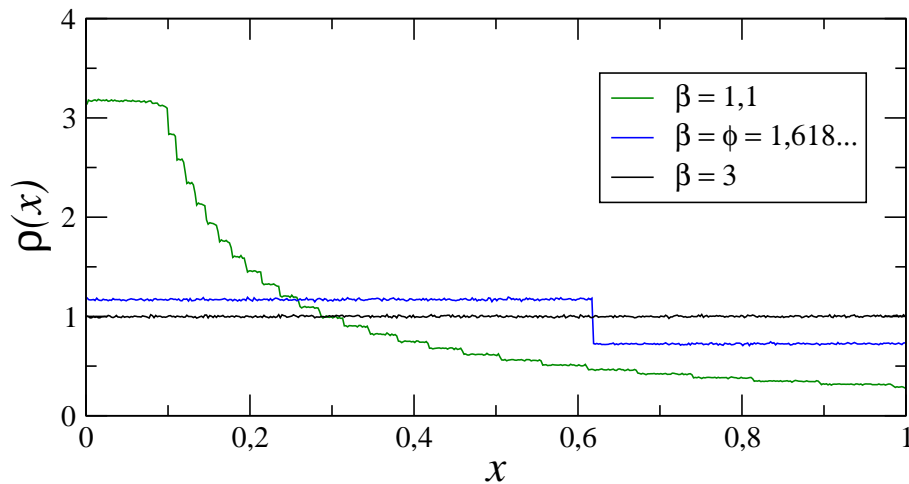


Figura 2.3: Densidade da medida do mapa de Bernoulli para diferentes valores de β .

2.3 Os expoentes característicos

As duas principais características de sistemas caóticos, a instabilidade e a aperiodicidade, podem ser quantificadas através da introdução dos expoentes característicos: os expoentes de Lyapunov e as entropias topológicas e de Kolmogorov-Sinai. Nessa seção apenas as definições serão expostas, pois o desenvolvimento e o cálculo desses expoentes serão realizados nos capítulos posteriores.

2.3.1 O expoente de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov de uma trajetória $\{\mathbf{x}_k\}$ quantificam a estabilidade desta quanto a perturbações infinitesimais típicas. Para a definição, considere $\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ um mapa

caótico d -dimensional e sua expansão em série de Taylor até primeira ordem:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}') + \mathbf{Dg}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.11)$$

sendo $\mathbf{Dg}(\mathbf{x})$ a matriz Jacobiana d -dimensional cujos elementos são dados por

$$[\mathbf{Dg}(\mathbf{x})]_{ab} = \frac{\partial g_a(\mathbf{x})}{\partial x^{(b)}}. \quad (2.12)$$

Assim, a cada iterada, duas trajetórias infinitesimalmente próximas, dadas por $\{\mathbf{x}_k\}$ e $\{\mathbf{x}'_k\}$ afastam-se segundo

$$\delta \mathbf{x}_n = \mathbf{Dg}(\mathbf{x}_n)|_{\mathbf{x}'_n}.$$

Pela regra da cadeia, encontra-se $\delta \mathbf{x}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{Dg}(\mathbf{x}_k)|_{\mathbf{x}'_k}$. Assim, define-se os d expoentes de Lyapunov de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ calculados sobre $\{\mathbf{x}_k\}$ como ⁽⁸⁾

$$h_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{Dg}^{(n)}(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_k\|, \quad (2.13)$$

sendo \mathbf{v}_k o k -ésimo autovetor da matriz Jacobiana $\mathbf{Dg}(\mathbf{x}_n)$ e $\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{g}^{(n)}(\mathbf{x}_0)$. A figura 2.4 representa, de modo esquemático, a ação do mapa \mathbf{g} nas trajetórias vizinhas a \mathbf{x} . A deformação do espaço de fase é quantificada pelos expoentes de Lyapunov. A esfera d -dimensional em 2.4(a) se deforma em um elipsóide cujos eixos são ampliados ou reduzidos exponencialmente a uma taxa dada por h_k . Tais eixos são determinados pelas autodireções de $\mathbf{Dg}(\mathbf{x}_n)$, dadas pelos autovetores \mathbf{v}_k em (2.13). Esses autovetores definem, portanto, direções principais para a dinâmica. De fato, as variedades estáveis e instáveis, indicadas pelas linhas azul e vermelha, respectivamente, na figura 2.4, são tangentes aos subespaços definidos pelos autovetores estáveis e instáveis ⁽⁸⁾. Define-se um autovetor \mathbf{v}_k como estável se $h_k < 0$ e instável caso $h_k > 0$ ⁽²⁾.

A construção indicada na figura 2.4 é formalmente garantido pelo seguinte teorema⁽²⁾:

Teorema 1 *Seja E uma esfera unitária em \mathbb{R}^d , e seja \mathbf{A} uma matriz $d \times d$. Sejam a_0^2, \dots, a_{d-1}^2 e $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{d-1}$ os autovalores e autovetores unitários da matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, respectivamente. Então,*

1. $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{d-1}$ são vetores unitários mutuamente ortogonais;

2. os eixos da elipse \mathbf{AE} são $a_m \mathbf{a}_m$ para $0 \leq m < d$.

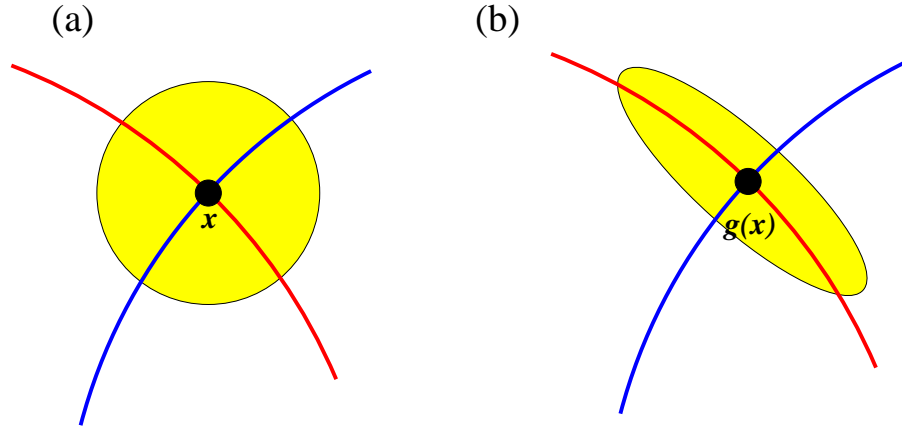


Figura 2.4: A ilustração pictórica da deformação do espaço de fase quantificada pelos expoentes de Lyapunov. (a) Uma esfera de condições iniciais próximas a um ponto \mathbf{x} é mapeada para um (b) elipsóide em torno de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, sendo que os eixos se expandem nas direções instáveis e se contraem nas estáveis.

Embora os expoentes de Lyapunov sejam definidos em termos de uma trajetória $\{\mathbf{x}_k\}$, esse não deve depender da condição inicial \mathbf{x}_0 , desde que esta seja típica, devido à ergodicidade indicada em (2.8).

Percebe-se que se $d = 1$, a expressão (2.13) se torna

$$h_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{dg(x_k)}{dx} \right|, \quad (2.14)$$

e, portanto, de (2.5) obtém-se

$$h_0 = \ln \beta, \quad (2.15)$$

em acordo com a observação feita na seção anterior: o mapa é instável para $\beta > 1$.

2.3.2 As entropias

Enquanto os expoentes de Lyapunov quantificam a instabilidade de \mathbf{g} , as entropias aqui apresentadas referem-se à complexidade e à aperiodicidade verificada. A definição dessas entropias requer o desenvolvimento de um particionamento sistemático do espaço de fase.

Considere que ω pode ser decomposto em J conjuntos disjuntos w_k , tal que

$$\omega = w_1 \cup w_2 \cup \dots \cup w_J.$$

Define-se a função entropia para a partição $\{w_k\}$ por

$$H(\{w_k\}) \equiv \sum_{k=1}^J \mu(w_k) \ln \left(\frac{1}{\mu(w_k)} \right), \quad (2.16)$$

sendo $\mu(w_k)$ a medida natural do mapa \mathbf{g} na porção w_k do espaço de fase. Define-se também

$$\mu(w_k) \ln \left(\frac{1}{\mu(w_k)} \right) \equiv 0, \quad \text{se} \quad \mu(w_k) = 0. \quad (2.17)$$

A expressão (2.16) é motivada pela entropia de Shannon,

$$h_{shan} = - \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (2.18)$$

que quantifica o grau de imprevisibilidade em um processo probabilístico, sendo a soma sobre todos os eventos possíveis caracterizados pela probabilidade $p_i^{(8)}$. Agora, considere sucessivas partições do espaço de fase, $\{w_k^{(n)}\}$, dadas por

$$w_k^{(n)} = w_a^{(n-1)} \cap \mathbf{g}^{-1}(w_b^{(n-1)}) \quad (2.19)$$

para qualquer par $a, b = 1, \dots, J$. A notação $\mathbf{g}^{-1}(w_k)$ refere-se ao conjunto de todos os pontos que são mapeados para w_k pela ação de \mathbf{g} . Gerando partições cada vez menores a partir de (2.19), define-se a entropia da partição original $\{w_k\}$ como

$$h_\mu(\{w_k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\{w_k^{(n)}\}). \quad (2.20)$$

Perceba que o somatório em (2.16) estende-se de 1 à J^n . O resultado (2.20) depende do particionamento inicial $\{w_k\}$ escolhido. Para eliminar essa dependência, define-se a entropia métrica, ou *entropia de Kolmogorov-Sinai*, por ⁽⁸⁾

$$h_{KS} = \sup_{\{w_k\}} h_\mu(\{w_k\}). \quad (2.21)$$

O particionamento do espaço de fase $\{w_k\}$ que resulta em h_{KS} é dito a partição geratriz de ω para a medida μ .

A entropia de Kolmogorov-Sinai fornece a taxa exponencial com que um sistema caótico gera informação. Para ver isso, considere que uma condição inicial \mathbf{x}_0 pode ser observada apenas com uma precisão finita, como ocorre em qualquer medida experimental. Agora, considere a evolução temporal exata da trajetória $\{\mathbf{x}_k\}$, tal qual seria dada pela evolução do experimento em questão. A observação sequencial de qual partição w_k a trajetória visita a cada tempo n informa em que partição $w_k^{(n)}$ a condição inicial \mathbf{x}_0 estava. No limite $n \rightarrow \infty$ o volume da partição $w_k^{(n)}$ vai a zero e a posição inicial é unicamente determinada, com precisão absoluta. Nesse sentido, diz-se que acompanhar a evolução temporal de uma trajetória caótica fornece informação sobre o sistema. O máximo de informação por iterada é obtido quando o particionamento inicial $\{w_k\}$ é ótimo, ou seja, h_{KS} fornece a taxa máxima de informação criada por um sistema caótico. A positividade de h_{KS} implica caos.

De maneira geral, pode-se provar ⁽⁶⁾ que a entropia métrica é, no máximo, igual à soma dos expoentes de Lyapunov positivos de \mathbf{g} :

$$h_{KS} \leq \sum_{h_k > 0} h_k, \quad (2.22)$$

sendo a igualdade válida para sistemas que satisfazem o axioma A - ver seção 2.6.

A definição da entropia topológica segue o mesmo particionamento do espaço de fase, mas considera apenas o número de partições $\mathcal{N}(\{w_k^{(n)}\})$ que não são vazias, isto é, que possuem $\mu(w_l^{(n)}) > 0$. Define-se então a quantidade

$$h_T(\{w_k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[\mathcal{N}(\{w_k^{(n)}\}) \right], \quad (2.23)$$

como a taxa de crescimento exponencial do número de partições $w_k^{(n)}$ não vazias. Agora, maximizando $h_T(\{w_k\})$ sobre todas as partições iniciais possíveis, encontra-se a *entropia topológica* do mapa \mathbf{g} ⁽⁸⁾:

$$h_T = \sup_{\{w_k\}} h_T(\{w_k\}) \quad (2.24)$$

Note que, pela definição de h_T , a entropia topológica do mapa \mathbf{g} fornece a taxa de crescimento máxima do número de partições necessárias para se localizar o atrator, uma vez que as partições

com $\mu(w_k) = 0$ não são consideradas.

De modo geral, é verdade que ⁽⁸⁾

$$h_T \geq h_{KS} \quad (2.25)$$

e, portanto, a positividade de h_T também implica caos. Note que ambas as entropias definidas nessa seção envolvem o crescimento do número de partições para se especificar uma trajetória do mapa \mathbf{g} . Por isso essas entropias são utilizadas para quantificar a complexidade dos sistemas caóticos.

2.4 A sela caótica

A exposição desenvolvida até agora foi considerando trajetórias confinadas a atratores caóticos, ou seja, o comportamento caótico dessas trajetórias continua indefinidamente. Em muitas situações, observa-se comportamento caótico apenas por períodos finitos de tempo, ditos *transientes caóticos*. Isso ocorre quando existe no espaço de fase ω um conjunto caótico, com as mesmas propriedades discutidas anteriormente, mas que não é atrativo. Esses conjuntos são denominados *selas caóticas*.

Uma sela caótica também possui, pelo menos, um expoente de Lyapunov positivo e as entropias topológica e de Kolmogorov-Sinai não nulas. Seja Γ uma região do espaço de fase ω que contenha uma sela caótica \mathcal{G} . Uma vez que \mathcal{G} é não atrativa, as trajetórias em $\Sigma \equiv \omega - \Gamma$ jamais entram em Γ . Suponha agora que um número muito grande de condições iniciais, $N_0(\Gamma)$, seja aleatoriamente distribuído em Γ . A evolução temporal dessas $N_0(\Gamma)$ condições iniciais forma um conjunto de trajetórias iniciadas em Γ , sobre o qual as quantidades métricas e topológicas da sela serão determinadas. Seja $N_n(\Gamma)$ o número de pontos que ainda permanecem em Γ após n iteradas do mapa. Como \mathcal{G} não é um atrator, observa-se

$$N_n(\Gamma) \leq N_m(\Gamma). \quad (n > m) \quad (2.26)$$

As quantidades características de qualquer sistema caótico, seja um atrator ou uma

sela, são determinadas no limite de $n \rightarrow \infty$. Por definição, espera-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\Gamma) = 0. \quad (2.27)$$

As trajetórias que escapam de Γ , isto é, que deixam o conjunto Γ , no tempo n , o fazem seguindo a variedade instável da sela caótica \mathcal{G} . Sobre essa variedade, bem como nas suas vizinhanças, a dinâmica é instável e suave, sendo que as trajetórias se afastam exponencialmente rápido, a uma taxa determinada pelos expoentes de Lyapunov positivos. Desconsiderando-se as primeiras iteradas, espera-se que as trajetórias que permanecem em Γ estejam nas proximidades das variedades estável ou instável de \mathcal{G} . Aquelas que estão próximas à variedade instável, deixarão Γ exponencialmente rápido. Aquelas próximas à variedade estável, se aproximarão de \mathcal{G} para então alcançar uma rota de escape *via* variedade instável². Portanto, espera-se que, para $n \gg 1$ ⁽⁵⁾,

$$N_n(\Gamma) \sim e^{-\gamma n}, \quad (2.28)$$

sendo γ chamado de *taxa de escape* da sela caótica \mathcal{G} . As definições dos expoentes característicos da seção anterior podem ser aplicadas a selas caóticas, desde que o decaimento do número de trajetórias seja compensado, fazendo-se $\mu(w_k^{(n)}) \rightarrow e^{\gamma n} \mu(w_k^{(n)})$ na definição da entropia métrica e considerando para o cálculo dos expoentes de Lyapunov o conjunto exponencialmente pequeno de trajetórias que permanecem em Γ para $n \gg 1$.

Note que, quanto mais instável for \mathcal{G} , maior deve ser γ . Como as trajetórias que demoram para escapar são aquelas que permanecem nas vizinhanças da variedade estável, quanto mais densa em Γ for tal variedade, menor deve ser o escape. De maneira geral, observa-se ⁽⁵⁾

$$\gamma = \sum_{h_k > 0} h_k - h_{\text{KS}}, \quad (2.29)$$

sendo essa identidade formalmente verificada para sistemas satisfazendo o axioma A. Note que as três quantidades em (2.29) representam taxas temporais e possuem dimensão de $[\text{tempo}]^{-1}$. O recíproco dessas quantidades definem escalas de tempo características do sistema. Enquanto

²Em completa analogia com a dinâmica observada nas vizinhanças de um ponto fixo instável do tipo sela.

que o *tempo de Lyapunov*,

$$t_{\text{lyap}} \equiv \frac{1}{h_0}, \quad (2.30)$$

caracteriza o tempo médio de predictibilidade em um sistema caótico, o recíproco da taxa de escape,

$$\langle \tau \rangle \equiv \frac{1}{\gamma}, \quad (2.31)$$

define o *tempo de vida médio* do transiente caótico. $\langle \tau \rangle$ representa o tempo necessário para que o número de trajetórias em Γ caia para $1/e$ de seu valor inicial.

2.5 O operador de transferência e a dinâmica simbólica

Como foi verificado na seção anterior, é possível definir um particionamento do espaço de fase tal que, ao se observar a seqüência de partições visitadas por uma trajetória no limite $n \rightarrow \infty$, a localização da condição inicial pode ser unicamente determinada. Essa é uma propriedade intrínseca de sistemas caóticos. Se um símbolo for associado a cada um dos J componentes da partição geratriz, definida por (2.21), a evolução temporal de qualquer trajetória $\{\mathbf{x}_k\}$ de \mathbf{g} pode ser unicamente representada por uma seqüência simbólica infinita. Basta que os símbolos representem, seqüencialmente, as partições visitadas pela trajetória. O procedimento pode ser invertido e, para cada seqüência infinita, uma, e apenas uma, trajetória está associada. Assim, a associação de um símbolo para cada elemento da partição geratriz define de maneira biunívoca a *dinâmica simbólica* do mapa \mathbf{g} .

Para os mapas de Bernoulli investigados no início desse capítulo, pode-se mostrar que a partição geratriz é dada pelas regiões de suavidade do mapa. A associação de uma trajetória com uma seqüência simbólica é diretamente realizada considerando-se a ação, ou não, do módulo 1 na trajetória.

Segundo a definição da entropia topológica e da sistemática apresentada para a associação simbólica, vê-se que h_T dada por (2.24) representa a taxa de crescimento exponencial do número de seqüências simbólicas permitidas ao sistema. Assim, uma vez conhecidas as regras de

transições entre as partições w_k , é possível se obter a entropia topológica do sistema. Como exemplo, considere que o espaço de fase é particionado em apenas dois subconjuntos e associe o símbolo “0” e “1” para um deles.

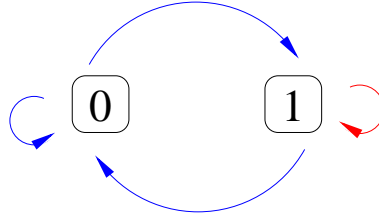


Figura 2.5: Representação do itinerário mais simples possível: sequência simbólica binária com todas as transições possíveis. Ao se desconsiderar a transição indicada em vermelho, tem-se um exemplo trivial da proibição de algumas transições.

A dinâmica de um mapa g é refletida nas regras de transição impostas à dinâmica simbólica. Considere a figura 2.5, na qual as setas indicam as transições permitidas. Note que, ao se considerar todas as transições, as seguintes seqüências podem ser observadas:

$$\begin{array}{rcll}
 n = 1 & n = 2 & n = 3 & \\
 & & 011 \rightarrow & \\
 & 01 \rightarrow & 010 \rightarrow & \\
 & & 001 \rightarrow & \\
 0 \rightarrow & 00 \rightarrow & 000 \rightarrow & \cdots, \\
 1 \rightarrow & 10 \rightarrow & 100 \rightarrow & \\
 & & 101 \rightarrow & \\
 & 11 \rightarrow & 110 \rightarrow & \\
 & & 111 \rightarrow &
 \end{array} \tag{2.32}$$

ou seja, a cada nova iterada, cada seqüência simbólica gera mais duas, dadas pela repetição da seqüência acrescida de um “0” ou um “1”. É evidente que o número de símbolos possíveis dobra a cada iterada e, portanto,

$$h_T = \ln 2,$$

para a partição binária em que todas as transições são possíveis. A regra de transição exposta na figura 2.5 representa o mapa de Bernoulli para $\beta = 2,00$.

Um exemplo um pouco mais ilustrativo é obtido também da figura 2.5, mas agora desconsiderando a transição indicada em vermelho, isto é, assumindo que a partição associada

ao “1” é totalmente mapeada para a partição “0”. Nesse caso, as seqüências permitidas são:

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 1 & n = 2 & n = 3 & n = 4 & & & \\
 & & & 0101 \rightarrow & & & \\
 & 01 \rightarrow & 010 \rightarrow & 0010 \rightarrow & & & \\
 & & 001 \rightarrow & 0010 \rightarrow & & & \\
 & & & 0001 \rightarrow & & & \\
 0 \rightarrow & 00 \rightarrow & 000 \rightarrow & 0000 \rightarrow & \dots & & \\
 1 \rightarrow & 10 \rightarrow & 100 \rightarrow & 1000 \rightarrow & & & \\
 & & & 1001 \rightarrow & & & \\
 & & 101 \rightarrow & 1010 \rightarrow & & &
 \end{array} \quad (2.33)$$

Note que, agora, o número de novas possibilidades não é trivialmente determinado, como no caso anterior. A introdução da *matriz de transferência* torna-se extremamente útil para essa análise ⁽¹¹⁾. Seja \mathbf{T} uma matriz $J \times J$ tal que seus elementos são dados por

$$[\mathbf{T}]_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathbf{g}(w_a) \cap w_b \neq \emptyset \\ 0 & \text{caso } \mathbf{g}(w_a) \cap w_b = \emptyset \end{cases}.$$

Para o caso considerado, a matriz transição \mathbf{T} é 2×2 e dada por

$$\mathbf{T} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

sendo que assumiu-se “0” para w_1 e “1” para w_2 . Observe que essa associação é arbitrária. Por construção, o elemento $[\mathbf{T}^n]_{a,b}$ representa o número de caminhos distintos para se alcançar a partição w_b , partindo-se de w_a , em n iteradas do mapa \mathbf{g} . Portanto, o número K_n de seqüências simbólicas de tamanho n possíveis é dado por

$$K_n = \sum_{a,b=1}^J [\mathbf{T}^n]_{a,b} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Uma expressão assintótica para K_n é obtida expandindo-se os vetores indicados em

(2.35) na base dos autovetores de \mathbf{T} ; o resultado encontrado é

$$K_n = \sum_{a=0}^{J-1} c_a t_a^n = t_0^n \sum_{a=0}^{J-1} c_a \left(\frac{t_a}{t_0} \right)^n, \quad (2.36)$$

sendo t_a o a -ésimo autovalor de \mathbf{T} , decrescentemente ordenados segundo as suas magnitudes, e as constantes c_a dadas em termos dos componentes dos autovetores associados. Assim, a entropia topológica do sistema é dada por

$$h_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln K_n = \ln t_0. \quad (2.37)$$

A convergência da série (2.36) é garantida devido à transitividade assumida ao mapa \mathbf{g} que gera a sequência simbólica. Por definição, sistemas que satisfazem o axioma A são transitivos.

De posse do resultado (2.37), a entropia topológica do sistema que gera a sequência simbólica (2.33) é facilmente determinada. Os autovalores de \mathbf{T} , dada por (2.34), são

$$t_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \equiv \phi \quad (2.38)$$

$$t_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \equiv \phi_- \quad (2.39)$$

e, portanto,

$$h_T = \ln \phi.$$

Logo, a simples imposição de que “1” apenas mapeia “0” resulta em uma redução considerável na entropia topológica do sistema. Uma inspeção rápida da figura 2.3 indica que a associação do símbolo “0” para o intervalo $w_0 = [0, \beta^{-1})$ e o símbolo “1” para o intervalo $w_1 = [\beta^{-1}, 1)$ resulta exatamente no itinerário indicado em (2.33) quando $\beta = \phi$. Assim, a dinâmica simbólica do mapa de Bernoulli para $\beta = \phi$ é dada pela figura 2.5, desconsiderando-se a transição indicada em vermelho.

2.6 A hiperbolicidade

Uma região $\mathcal{A} \subseteq \omega$ do espaço de fase ω de um mapa $\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ d -dimensional é dita *hiperbólica*, ou o conjunto \mathcal{A} possui estrutura hiperbólica, se seguintes condições são satisfeitas

(7):

1. As variedades estável $\mathcal{W}^e(\mathbf{x})$, cuja dimensão é d_e , e instável $\mathcal{W}^i(\mathbf{x})$, com dimensão d_i , tal que $d = d_e + d_i$, não são tangentes entre si e d_e e d_i são constantes, para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$;
2. Existe uma constante $\kappa > 1$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, se \mathbf{v} é um vetor tangente à variedade instável, então

$$\|\mathbf{Dg}(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \geq \kappa \|\mathbf{v}\|,$$

e se \mathbf{v} é tangente à variedade estável, então

$$\|\mathbf{Dg}(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{v}\|.$$

Da condição 2, pontos próximos sobre a mesma variedade estável se aproximam através da evolução temporal de \mathbf{g} pelo menos tão rápido quanto $e^{-\kappa n}$. Analogamente, pontos próximos sobre a variedade instável se afastam pelo menos tão rápido quanto $e^{\kappa n}$. Por exemplo: os autovalores η_k de $\mathbf{Dg}^{(p)}(\mathbf{x})$ calculados sobre um ponto p -periódico \mathbf{x}_p^* devem satisfazer $|\eta_k(\mathbf{x}_p^*)| \geq \kappa^p$, nas direções instáveis, e $|\eta_k(\mathbf{x}_p^*)| \leq \kappa^{-p}$, nas direções estáveis. Essas condições são expressas na seguinte definição de estrutura hiperbólica ⁽¹⁾:

Definição 2 *Seja \mathcal{J} um conjunto invariante de \mathbf{g} . Uma estrutura hiperbólica para \mathcal{J} é uma decomposição direta, contínua e invariante $T_{\mathcal{J}}\omega = E_{\mathcal{J}}^{(e)} \oplus E_{\mathcal{J}}^{(i)}$ com a propriedade de que existem constantes $\kappa > 0$ e $0 < \eta < 1$ tais que*

$$1. \text{ se } \mathbf{v} \in E_{\mathcal{J}}^{(e)}, \text{ então } |\mathbf{Dg}^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{v}| \geq \kappa \eta^n |\mathbf{v}|;$$

$$2. \text{ se } \mathbf{v} \in E_{\mathcal{J}}^{(i)}, \text{ então } |\mathbf{Dg}^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{v}| \leq \kappa \eta^{-n} |\mathbf{v}|.$$

Sistemas, cujo o espaço de fase possui uma estrutura hiperbólica, são ditos *sistemas hiperbólicos*. Se existir em ω uma região \mathcal{A} , sendo $\mu(\mathcal{A}) > 0$, tal que uma das condições acima não é satisfeita, o sistema é dito *não-hiperbólico*. Portanto, existem dois tipos de não-hiperbolicidade: um conjunto pode ser não-hiperbólico por apresentar tangências entre suas

variedades estáveis e instáveis ou se a dimensão dessas variedades não for constante para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

Os sistemas em que a medida natural obedece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap \mathbf{g}^{(n)}(B)) = \mu(A)\mu(B), \quad (2.40)$$

para quaisquer $A, B \subset \omega$, são ditos “mixing”. A condição (2.40) implica ergodicidade, indicada na equação (1.4), mas o contrário não é necessariamente verdade - “mixing” é mais geral que ergodicidade. A existência de um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis em ω garante que o sistema é “mixing”⁽⁸⁾.

De posse das definições de estrutura hiperbólica e “mixing”, pode-se enunciar o *axioma A*:

Axioma A *O mapa $\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ é mixing e ω possui estrutura hiperbólica.*

3 As órbitas periódicas instáveis

3.1 A medida natural em função das órbitas periódicas instáveis

Nesta seção uma expressão para a medida natural de um atrator em função das órbitas periódicas contidas neste atrator será derivada. Este resultado justifica, de maneira formal, a afirmação de que as órbitas periódicas instáveis compõe o esqueleto sobre o qual a dinâmica caótica é construída. O desenvolvimento apresentado a seguir assume que $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \Omega$ é um mapa caótico d dimensional satisfazendo o axioma A, enunciado na seção 2.6, e é devido à Grebogi, Ott e Yorke ⁽⁷⁾.

Uma maneira sistemática de se particionar o espaço de fase é considerar células delimitadas pelas variedades estáveis e instáveis. Denote cada célula por C_k . Se estas partições forem pequenas, a curvatura das variedades podem ser desprezadas e pode-se aproximar estas células por paralelogramas, como indicado na figura 3.1. Devido à hipótese de sistema hiperbólico, as variedades cruzam-se sempre de modo não tangente, logo, a construção destes paralelogramas é sempre possível.

Considere agora uma partição específica C_j e um conjunto de condições iniciais repetindo a medida natural do atrator caótico nesta partição. Após n iteradas, algumas destas condições iniciais podem retornar à C_j . Como estamos assumindo sistemas que satisfazem o axioma A, a fração de condições iniciais¹ que retornam para C_j quando $n \rightarrow \infty$ é igual à medida natural desta célula, $\mu(C_j)$.

Seja \mathbf{x}_0 uma das condições iniciais que retorna à C_j após n iteradas. Esta construção está representada esquematicamente na figura 3.2, onde a variedade estável está representada

¹Para isto, assumem-se infinitas condições iniciais.

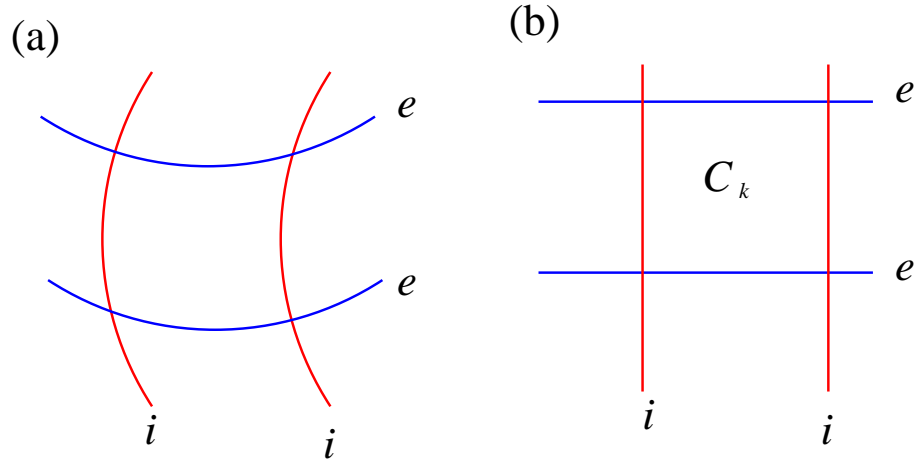


Figura 3.1: a) Ilustração esquemática da partição do espaço de fase em termos das variedades estáveis, indicadas em azul, e instáveis, indicadas em vermelho. b) Aproximação por paralelogramas: as células C_k são suficientemente pequenas para que a curvatura das variedades possa ser desprezada ⁽⁷⁾.

na horizontal e a variedade instável na vertical. Embora a figura esteja ilustrando um espaço bidimensional, entende-se que localmente, dentro e nas vizinhanças de cada célula C_j , estas variedades são representadas por espaços Euclidianos com dimensão d_e , para a variedade estável, e d_i , para a variedade instável, sendo, portanto, as linhas apenas uma representação pictórica unidimensional de espaços com dimensão d_e e d_i .

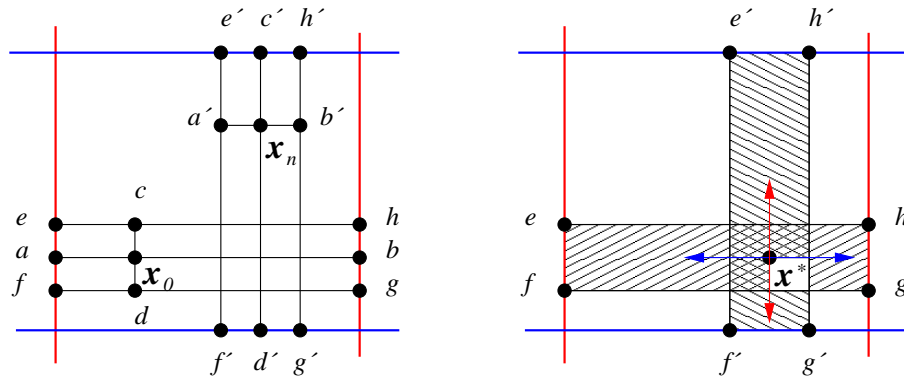


Figura 3.2: Representação esquemática da fração da área de C_j que retorna após n iterações ⁽⁷⁾.

As linhas \overline{ab} e $\overline{c'd'}$ formam um segmento das variedades estável e instável, respectivamente. A imagem após n iterações do segmento sobre a variedade estável está indicada pela linha $\overline{a'b'}$, enquanto que a n -ésima pré-imagem do segmento sobre a variedade instável é dada pela linha \overline{cd} . Agora, pode-se determinar o conjunto de pontos dentro de C_j que retornam a esta partição após n iterações. Para isto, considere os segmentos da variedade instável $\overline{e'f'}$ e $\overline{g'h'}$

passando por a' e b' , respectivamente (ver figura 3.2). Por construção, estes dois segmentos formam a imagem após n iterações dos segmentos \overline{ef} e \overline{gh} , que representam porções da variedade estável. Assim, todos os pontos no interior do retângulo $efgh$ rachurado na figura 3.2 retornam à C_j após n iterações e estão contidos no retângulo $e'f'g'h'$.

Necessariamente, a interseção dos dois retângulos contém um ponto fixo do mapa n -vezes iterado, seja ele um ponto de período n ou m tal que $n = rm$ e $r \in \mathbb{N}_+$. Por hipótese, este ponto é uma sela com dimensão instável d_i e dimensão estável d_e . A expressão para a medida pode então ser relacionada às órbitas periódicas fazendo este argumento com $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}^*$, ou seja, construindo estes retângulos indicados na figura 3.2 considerando o ponto de período n . As dimensões de tais retângulos podem agora ser associadas aos autovalores de \mathbf{x}^* . Seja $L_i(\mathbf{x}^*)$ e $L_e(\mathbf{x}^*)$ respectivamente o produto da magnitude dos autovalores instáveis e estáveis de \mathbf{x}^* :

$$L_i(\mathbf{x}^*) = \prod_{k=0}^{d_i-1} |\eta_k(\mathbf{x}^*)| \quad (3.1)$$

$$L_e(\mathbf{x}^*) = \prod_{k=d-d_e}^{d-1} |\eta_k(\mathbf{x}^*)|, \quad (3.2)$$

sendo $\eta_k(\mathbf{x}^*)$ os autovalores de $\mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{x}^*)$ decrescentemente ordenados segundo suas magnitudes,

$$|\eta_0(\mathbf{x}^*)| \geq |\eta_1(\mathbf{x}^*)| \geq \dots \geq |\eta_{d_i-1}(\mathbf{x}^*)| > 1 > |\eta_{d-d_e}(\mathbf{x}^*)| \geq \dots \geq |\eta_{d-1}(\mathbf{x}^*)|. \quad (3.3)$$

Ao assumir C_j tão pequena de maneira que a curvatura das variedades seja nula, considera-se que a dinâmica em C_j é dominada pelo termo linear de \mathbf{f}^n , ou seja,

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*), \quad (3.4)$$

portanto, todos os segmentos considerados na construção dos retângulos na figura 3.2 sobre a variedade estável têm sua magnitude reduzida pelo fator $L_e(\mathbf{x}^*)$ e aqueles sobre a variedade instável têm sua magnitude ampliada pelo fator $L_i(\mathbf{x}^*)$. Assim, a área do retângulo $efgh$, que forma a pré-imagem de $e'f'g'h'$, delimitado verticalmente pelas porções da variedade instável é determinada pelo fator $1/L_i(\mathbf{x}^*)$. Uma vez que a medida natural do atrator varia suavemente na direção instável e C_j é pequena, pode-se assumir que nesta célula a medida do atrator é uniforme. Logo, a fração da área de C_j ocupada pelo retângulo $efgh$ é dada por $1/L_i(\mathbf{x}^*)$.

Como para $n \rightarrow \infty$ esta fração é igual à fração de condições iniciais que retornam à C_j , tem-se a expressão para a medida natural da célula em função dos autovalores instáveis de \mathbf{x}^* :

$$\mu(C_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}^* \in C_j} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)}, \quad (3.5)$$

na qual o somatório foi introduzido de maneira a considerar a contribuição de todos os pontos fixos \mathbf{x}^* do mapa n vezes iterado contidos em C_j pois, devido à ergodicidade, a medida natural é aditiva.

Duas observações são necessárias na derivação de (3.5). Primeiramente, embora este resultado seja obtido através da aproximação linear do mapa \mathbf{f}^p dentro de C_j , a expressão para a medida é formalmente válida, pois pode-se mostrar que esta aproximação difere no máximo por um fator $1 \pm \varepsilon$ do valor obtido por um cálculo mais detalhado, sendo ε dependente das dimensões de C_j e da segunda derivada de $\mathbf{f}^p(\mathbf{x}^*)$. Como se pode escolher C_j arbitrariamente pequeno, sempre é possível fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ e, portanto, (3.5) é formalmente válida.

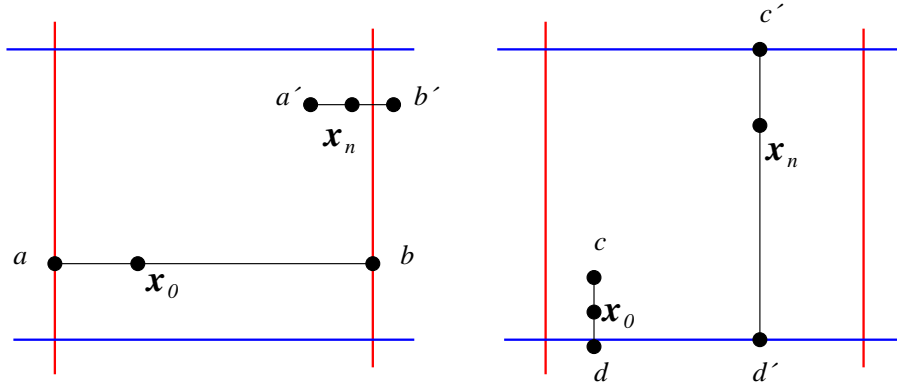


Figura 3.3: Exemplo de localização proibida para as imagens e pré-imagens quando as células C_k formam partições de Markov ⁽⁷⁾.

A segunda observação é que na construção dos retângulos na figura 3.2 considera-se que a imagem de \overline{ab} e a pré-imagem de $\overline{c'd'}$ estão completamente contidas em C_j . Esta é uma condição necessária para o desenvolvimento de (3.5). O ponto a ser considerado é que tais células podem ser escolhidas como partições de Markov do espaço de fase e, como consequência, um segmento interior de C_j não pode ser mapeado, nem pode ter sua imagem, parcialmente fora de C_j , por definição. Como sistemas que satisfazem o axioma A necessariamente possuem partições de Markov, situações como a indicada na figura 3.3 não ocorrem.

Um exemplo simples, mas esclarecedor da aplicabilidade da expressão (3.5), pode ser obtido ao se analisar o mapa de Bernoulli. Como foi visto no capítulo anterior, para determinados valores de β , a determinação da dinâmica simbólica desse mapa pode ser feita de maneira sistemática. Para $\beta \in \mathbb{N}$ com $\beta > 1$ existem β partições do espaço de fase e a cada uma dessas um símbolo é associado. Para cada ponto de $\Omega = [0, 1)$, a sequência simbólica associada é a expansão de $x \in \Omega$ na base β . Como cada sequência simbólica está associada a um ponto periódico do mapa, é possível determinar todos os pontos periódicos do mapa. Assim, através de (3.5), pode-se determinar a medida de cada partição. Sejam

$$C_j = \left[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta} \right), \quad (j = 0, 1, \dots, \beta) \quad (3.6)$$

as β partições de Ω . Como para β inteiro todas as sequências simbólicas são possíveis, o número de pontos fixos da n -ésima iterada do mapa em cada uma das partições é dado por

$$N_n(C_j) = \frac{\beta^n}{\beta} = \beta^{n-1}, \quad (3.7)$$

pois existem β^n símbolos e β partições. Assim, como $L_i(x) = \beta^n$ para todos os pontos de período n em Ω , tem-se de (3.5):

$$\begin{aligned} \mu(C_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in C_j} \frac{1}{\beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(C_j)}{\beta^n} \\ \mu(C_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta^{n-1}}{\beta^n} = \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, através das órbitas periódicas do mapa de Bernoulli, conclui-se que para β inteiro, a medida de todas as partições C_j dadas por (3.6) são iguais. Como todas as partições possuem o mesmo tamanho, a medida é uniforme em todo o espaço de fase Ω , como foi verificado na figura 2.3, sendo a densidade da medida $d\mu(x) = \rho(x)dx$ dada por

$$\rho(x) = 1, \quad \beta \in \{k : k \in \mathbb{N}, k > 1\}.$$

Considere agora o caso de $\beta = \phi$, no qual se sabe que a medida não é uniforme. O espaço de fase pode ser particionado em duas células,

$$C_0 = [0, \phi^{-1}) \quad \text{e} \quad C_1 = [\phi^{-1}, 1).$$

Novamente, o autovalor de qualquer ponto n -periódico é ϕ^n . Basta determinar $N_n(C_j)$. Para isso, retoma-se a expressão para a matriz de transição desse mapa, dada pela equação (2.34):

$$\mathbf{T} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Como foi visto no capítulo anterior, os elementos da diagonal de \mathbf{T}^n representam o número de seqüências simbólicas distintas com tamanho n que terminam com o símbolo associado a cada linha, ou seja, o número de pontos n -periódicos distintos em cada uma das partições do espaço de fase. Portanto, $N_n(C_j) = [\mathbf{T}^n]_{jj}$.

A determinação dos elementos de \mathbf{T}^n pode ser feita de maneira elegante com a introdução dos números de Fibonacci ⁽¹²⁾:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (n > 1) \quad (3.10)$$

de modo que

$$\mathbf{T}^{n-1} \doteq \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Note que, por indução, (3.11) é obtida:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2 &\doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}^3 &\doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 2+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}^4 &\doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+1 \\ 3+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, determina-se o número de pontos fixos em C_j :

$$N_n(C_0) = [\mathbf{T}^n]_{00} = F_{n+1} \quad (3.12)$$

$$N_n(C_1) = [\mathbf{T}^n]_{11} = F_{n-1}. \quad (3.13)$$

Como os números de Fibonacci podem ser expressados por ⁽¹²⁾²

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\phi^n - \phi_-^n], \quad (3.14)$$

sendo $\phi_- \equiv (1 - \sqrt{5})/2$, tem-se a expressão da medida das duas partições:

$$\mu(C_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{[\phi^{n+1} - \phi_-^{n+1}]}{\phi^n} = \frac{\phi}{\sqrt{5}} \quad (3.15)$$

$$\mu(C_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{[\phi^{n-1} - \phi_-^{n-1}]}{\phi^n} = \frac{(\phi - 1)}{\sqrt{5}}, \quad (3.16)$$

nas quais os fatos que $\phi^{-1} = (\phi - 1)$ e $\phi_- < \phi$ foram utilizados. Observe que

$$\mu(C_0) + \mu(C_1) = \frac{\phi}{\sqrt{5}} + \frac{\phi - 1}{\sqrt{5}} = 1.$$

Considerando o tamanho das partições, obtém-se

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\phi^2}{\sqrt{5}} & \text{se } x \in [0, \phi^{-1}) \\ \frac{\phi}{\sqrt{5}} & \text{se } x \in [\phi^{-1}, 1) \end{cases}, \quad (\beta = \phi) \quad (3.17)$$

exatamente o resultado obtido nas simulações da figura 2.3.

Nessa seção, foi mostrado que as infinitas órbitas periódicas instáveis contidas em um atrator caótico suportam a medida natural deste atrator. A aplicabilidade da expressão (3.5) foi exemplificada para o mapa de Bernoulli. No capítulo seguinte, esse mesmo resultado será utilizado para a análise de redes hiperbólicas de mapas de Bernoulli acoplados.

3.2 A taxa de escape em função das órbitas periódicas instáveis

A expressão (3.5) relaciona a medida de um *atrator* caótico às órbitas periódicas instáveis contidas neste atrator. Como foi indicado na seção 2.4, é possível que uma trajetória

²Esse resultado é obtido através da solução das expressões recursivas definidas por (3.10).

apresente um comportamento caótico por um tempo finito. Para isso, basta que a trajetória esteja em uma região $\Gamma \subset \Omega$ que contenha uma porção ou a totalidade de uma sela caótica \mathcal{G} . Ainda assim é possível relacionar as propriedades dinâmicas de \mathcal{G} com as órbitas periódicas contidas nessa sela caótica. A taxa de escape γ , que é uma quantidade intrínseca e fundamental da sela caótica, pode ser obtida em termos da estabilidade das órbitas periódicas com procedimento análogo ao da seção anterior. Essa derivação também é devida à Grebogi, Ott e Yorke (7).

Deve-se considerar que, uma vez que as células C_k agora contêm uma porção de uma sela caótica, o número de trajetórias que retornam após n iteradas será reduzido por um fator $e^{-\gamma n}$, uma vez que o número total de trajetórias que permanecem em \mathcal{G} decai exponencialmente com o número de iteradas n – ver equação (2.28):

$$N_n(\mathcal{G}) \propto e^{-\gamma n}. \quad (3.18)$$

Repetindo o procedimento para atratores, utilizando a mesma argumentação da suavidade da medida ao longo da variedade instável e das dimensões pequenas das células C_k e considerando o termo (3.18) no fato de que as áreas indicadas na figura 3.2 representam a medida de C_k no limite $n \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\gamma} \sum_{\mathbf{x}^* \in \Gamma} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)} = 1, \quad (3.19)$$

para $\mathcal{G} \subseteq \Gamma$. Assim, evidenciando γ , a expressão para a taxa de escape em termos das órbitas periódicas contidas na sela caótica \mathcal{G} é obtida:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{\mathbf{x}^* \in \Gamma} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Essa expressão está em concordância com a relação (2.29) para taxa de escape. Note que quanto maior for $L_i(\mathbf{x}^*)$, ou seja, quanto mais instável for \mathbf{x}^* , maior a contribuição da órbita $\{\mathbf{x}_m^*\}_{m=0}^{n-1}$ para o escape de trajetórias, mas quanto maior o número de órbitas de período p , mais termos não-nulos são somados e γ é diminuído. Uma vez que o número de órbitas periódicas na sela contida em Γ cresce exponencialmente a uma taxa dada pela entropia topológica $h_T(\Gamma)$,

observa-se que γ aumenta com a instabilidade do sistema e diminui com a complexidade do mesmo. Como a entropia topológica é relacionada com a entropia KS pela equação (2.25),

$$h_T(\Gamma) \geq h_{KS}(\Gamma), \quad (3.21)$$

a expressão (2.29) é qualitativamente recuperada.

Para o caso em que $\mathbf{Df}^{(n)}(\mathbf{x}^*)$ não depende de \mathbf{x}^* , ou seja, para sistemas lineares por partes, a expressão (3.20) é dada na forma

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{P_n(\Gamma)}{\prod_{k=0}^{d_i-1} |\eta_k(\mathbf{x}^*)|^n} \right)^{-1},$$

na qual $P_n(\Gamma)$ é o número de pontos com período n em Γ . Uma vez que esse número é dado por (3.18) e que³

$$h_k = \ln |\eta_k|,$$

a expressão

$$\gamma = \sum_{h_k > 0} h_k - h_T(\Gamma) \quad (3.22)$$

é obtida. Nesse caso, a comparação com (2.29) fornece

$$h_T(\Gamma) = h_{KS}(\Gamma), \quad (3.23)$$

o que é geralmente válido para sistemas hiperbólicos⁽⁸⁾ e, portanto, a expressão (2.29) é quantitativamente recuperada a partir de (3.20). Por fim, note que se $\gamma = 0$ nas equações (3.19) e (3.20), ou seja, não há escape e \mathcal{G} é um atrator caótico, a expressão (3.5) é recuperada.

3.3 A detecção de órbitas periódicas

Uma vez que as órbitas periódicas formam o esqueleto da dinâmica caótica, o conhecimento do conjunto de todos os pontos periódicos possibilita a análise de tais sistemas, pois esse

³Como a matriz Jacobiana do mapa é constante, o espectro de expoentes de Lyapunov é dado pelo logaritmo neperiano dos autovalores de $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$, η_k , pois se \mathbf{x}^* é um ponto de período n , então $\eta_k(\mathbf{x}^*) = \eta_k^n$.

conjunto fornece a expressão para a medida natural do atrator e, através desta medida, devido à ergodicidade, qualquer quantidade métrica pode ser obtida. Portanto, a análise das órbitas periódicas é uma ferramenta poderosa para o tratamento de sistemas caóticos. A dificuldade surge na determinação desse conjunto. Apenas em poucos casos é possível determinar *a priori* a partição do espaço de fase e utilizar a relação biunívoca entre a dinâmica simbólica e as órbitas periódicas para se obter o conjunto de todos os pontos periódicos, como foi feito na seção anterior para o mapa de Bernoulli.

A determinação dos pontos periódicos também pode ser feita através da solução da equação

$$\mathbf{f}^p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (3.24)$$

Mas, devido à não-linearidade do mapa \mathbf{f} , a solução analítica é, na maioria das vezes, impossível mesmo para mapas unidimensionais e períodos p pequenos. Uma alternativa é utilizar métodos numéricos iterativos para encontrar as soluções de (3.24). De maneira geral, constrói-se um sistema

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^p(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad (3.25)$$

e utiliza-se algum método numérico para encontrar os zeros de \mathbf{g} , uma vez que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \Rightarrow \mathbf{f}^p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (3.26)$$

Como o mapa \mathbf{f} é não-linear, o comportamento de \mathbf{g} em torno de \mathbf{x}^* pode tornar-se bastante irregular conforme p cresce e os métodos tradicionais de solução apresentam problemas de convergência. Por exemplo, o método de Newton-Raphson, dado por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta \mathbf{x}, \quad (3.27)$$

com

$$\delta \mathbf{x} = -\mathbf{Dg}(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

possui convergência quadrática nas vizinhanças de \mathbf{x}^* , mas sua convergência é garantida apenas

se a semente inicial utilizada estiver na vizinhança linear de \mathbf{x}^* . O volume dessa vizinhança pode se tornar tão pequeno de maneira que nenhuma simulação com precisão finita seja capaz de iniciar uma semente dentro dessa vizinhança e, assim, alguns pontos periódicos não serão localizados ⁽¹³⁾.

Nesse trabalho, será apresentado e utilizado um método de detecção de pontos periódicos instáveis capaz de determinar, em princípio, todas as órbitas periódicas de um sistema caótico para qualquer período. Esse método e a exposição são devidos à Schmelcher e Diakonov ⁽¹⁴⁾.

O método consiste em construir um conjunto de novos sistemas $\{\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) : k = 1, \dots, M\}$ a partir do mapa $\mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x})$ que possuam pontos fixos exatamente nas mesmas posições dos pontos fixos de $\mathbf{f}^{(p)}$, mas que sejam estáveis em pelo menos um dos sistemas \mathbf{s}_k . Também é necessário que as transformações $\{L_k : \mathbf{f}^{(p)} \rightarrow \mathbf{s}_k\}$ preservem o número de pontos fixos. Isto é, as transformações L_k apenas alteram a estabilidade dos pontos fixos de $\mathbf{f}^{(p)}$, nenhum ponto é criado ou destruído. De maneira geral, o número M de transformações necessárias para tornar estável todos os pontos fixos de $\mathbf{f}^{(p)}$ é pequena, ou seja, uma mesma transformação L_k estabiliza diversos pontos fixos. Caso tais transformações existam, a detecção dos pontos fixos torna-se simples: condições iniciais típicas dos novos sistemas \mathbf{s}_k convergirão, após algum tempo transitório, para algum ponto fixo estável. Esse ponto, por construção, é um ponto fixo instável de $\mathbf{f}^{(p)}$.

Uma possível realização para os sistemas \mathbf{s}_k é

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{s}_k(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n + \mathbf{O}_k \left[\mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n \right], \quad (3.29)$$

na qual \mathbf{O}_k é uma matriz $d \times d$ invertível, cujos elementos $[\mathbf{O}_k]_{jl}$ são constantes. Note que (3.29) satisfaz a correspondência biunívoca entre os pontos fixos de $\mathbf{f}^{(p)}$ e \mathbf{s}_k , por isso requer-se a existência da inversa de \mathbf{O}_k . A grande versatilidade desse método está no fato de existir um conjunto finito de matrizes \mathbf{O}_k que estabilizam *todos* os pontos fixos de $\mathbf{f}^{(p)}$.

Pode-se mostrar que

$$\mathbf{O}_k = \zeta \mathbf{P} \mathbf{O}_{Dk} \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.30)$$

sendo $\varsigma > 0$ um parâmetro de controle, $\mathbf{O}_{Dk} = \text{diag}[\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1]$ e \mathbf{P} uma transformação de similaridade tal que

$$\mathbf{P}^{-1} [\mathbf{Dg}(\mathbf{x})] \mathbf{P} = \text{diag}[\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{d-1}] - \mathbf{1}. \quad (3.31)$$

Uma vez que

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{1}, \quad (3.32)$$

\mathbf{P} é necessariamente composta dos autovetores de $\mathbf{Df}^{(p)}(\mathbf{x})$ arranjados em colunas. A estabilização é dada para um $0 < \varsigma < \varsigma_C$. Tipicamente, ς_C é uma função decrescente de p .

Nos casos em que a transformação \mathbf{P} depende do ponto fixo \mathbf{x}^* que se deseja estabilizar, a determinação de \mathbf{O}_k , e conseqüentemente, \mathbf{s}_k , não pode ser feita através de (3.30) sem que o ponto fixo já seja conhecido. Nesses casos, pode-se mostrar que $M(d) = 2^d d!$ matrizes são suficientes, sendo as matrizes \mathbf{O}_k definidas por

$$[\mathbf{O}_k]_{jl} = \{\pm \varsigma, 0\}, \quad (3.33)$$

de modo que em cada matriz \mathbf{O}_k exista apenas um elemento não-nulo em cada linha e em cada coluna. Para sistemas de baixa dimensionalidade, $d \leq 3$, o número de sistemas \mathbf{s}_k é relativamente pequeno:

$$M(1) = 2, \quad M(2) = 8, \quad M(3) = 48.$$

Verifica-se ainda que diversas matrizes estabilizam o mesmo conjunto de pontos fixos, principalmente em sistemas que apresentam simetrias. Assim, o número de transformações \mathbf{s}_k necessárias para se estabilizar todos os pontos fixos é finita e tipicamente menor que M .

O intervalo para o parâmetro ς em que a estabilização é obtida é determinado pela análise da estabilidade linear do ponto fixo \mathbf{x}^* no novo sistema \mathbf{s}_k . A matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{Ds}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{1} + \mathbf{O}_k \left[\mathbf{Df}^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{1} \right], \quad (3.34)$$

e, portanto, o ponto fixo \mathbf{x}^* será estável no sistema \mathbf{s}_k se, e somente se, todos os autovalores de

$\mathbf{Ds}_k(\mathbf{x}^*)$ forem menores que a unidade, em módulo. Se, novamente, os autovalores de (3.34) forem representados por η_j e ordenados de maneira decrescente segundo suas magnitudes, os limites para ς são determinados por $|\eta_0| < 1$, ou seja, ς_C é obtido por

$$|\eta_0| = 1. \quad (3.35)$$

Como tipicamente (3.34) depende de \mathbf{x} , os valores de ς_C também dependem da órbita periódica que se deseja estabilizar.

A velocidade da convergência do método também é uma função de ς . Note que, no novo sistema \mathbf{s}_k , o expoente de Lyapunov máximo associado ao ponto fixo \mathbf{x}^* é dado por

$$h_0(\mathbf{x}^*) = \ln|\eta_0| < 0. \quad (3.36)$$

Portanto, espera-se que a distância entre duas trajetórias, o ponto fixo e a trajetória gerada pela iteração do método, tenham sua distância reduzida exponencialmente no tempo a uma taxa determinada por $h_0(\mathbf{x}^*)$:

$$\text{dist}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) \approx \text{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*) e^{-n|h_0(\mathbf{x}^*)|}. \quad (3.37)$$

Assim, caso o valor de (3.36) seja conhecido, o número esperado de iteradas para a convergência até uma dada precisão θ pode ser estimado:

$$n > \frac{1}{|h_0(\mathbf{x}^*)|} \ln \left(\frac{\text{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*)}{\theta} \right). \quad (3.38)$$

Logo, o número n de iteradas do método necessário para se detectar o ponto fixo com precisão θ é inversamente proporcional a $|h_0(\mathbf{x}^*)|$. Como $h_0(\mathbf{x}^*)$ é o maior dos expoentes de Lyapunov associados ao ponto fixo, a otimização da detecção é obtida quando ς é escolhido, de tal forma que

$$0 > h_0(\mathbf{x}^*) = h_1(\mathbf{x}^*). \quad (3.39)$$

Estes resultados surgem da análise dinâmica típica do sistema \mathbf{s}_k .

Por fim, é possível adaptar o método (3.29) para que não haja mais o parâmetro livre

ς . Para isso, faz-se $\varsigma \rightarrow 0$ em (3.29) de maneira a se obter o novo sistema \mathbf{s}'_k :

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\varsigma} &= \mathbf{O}'_k \left[\mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n \right] \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{O}'_k \left[\mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo $\mathbf{O}_k = \varsigma \mathbf{O}'_k$. Desse modo, a dependência com ς não é mais explícita e os pontos fixos \mathbf{x}^* , tais que $(\dot{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0$, são obtidos através da integração numérica de (3.40).

A mesma sistemática desse método pode ser utilizada para se localizar ciclos instáveis em fluxos ⁽¹⁵⁾, apenas substituindo $\mathbf{f}^{(p)}$ pelo mapa de Poincaré obtido através da integração do fluxo e da terminação de uma superfície de Poincaré apropriada. A forma deste mapa não precisa ser conhecida, apenas define-se \mathbf{x} como um determinado cruzamento da superfície e $\mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{x})$ como o p -ésimo novo cruzamento.

Através desse método, as órbitas periódicas instáveis de qualquer sistema caótico podem, em princípio, ser determinadas.

3.4 A expansão em ciclos primos

Como foi visto na seção anterior, é possível determinar numericamente o conjunto de todos os pontos periódicos de um mapa caótico para um determinado período p . A dificuldade do método é que o número de pontos cresce exponencialmente com o período,

$$P_p \propto \exp(h_T p), \quad (3.41)$$

sendo $h_T > 0$ a entropia topológica do sistema. Portanto, para períodos grandes, o número de pontos periódicos pode se tornar tão grande de maneira a inviabilizar o tratamento numérico. De outro lado, o resultado que apresentado para a medida natural em atratores caóticos e para a taxa de escape de selas caóticas em termos das órbitas periódicas requer o limite de $p \rightarrow \infty$. Nesse ponto, chega-se a uma contradição que aparentemente inviabilizaria o uso de (3.5) para sistemas em que a determinação dos pontos periódicos é necessariamente numérica. Esse problema pode ser elegantemente contornado em sistemas hiperbólicos ao se considerar a expansão em ciclos

primos. O desenvolvimento apresentado a seguir é devido à Cvitanovic *et. al.* ⁽¹¹⁾.

Como as expressões em termos dos autovalores instáveis das órbitas periódicas para um atrator caótico derivadas na seção 3.1 são obtidas tomando-se $\gamma = 0$ nas expressões da seção 3.2, derivadas para uma sela caótica $\mathcal{G} \subset \Gamma$, cuja taxa de escape é dada por γ , a expansão em ciclos primos apresentada será para a expressão (3.20):

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{\mathbf{x}^* \in \Gamma} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)} \right)^{-1}, \quad (3.42)$$

na qual, como já foi demonstrado, a soma se estende sobre todos os pontos fixos \mathbf{x}^* de $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x})$. Com base na formulação apresentada na seção 3.1, define-se a medida $\tilde{\mu}_n(\Gamma)$ como a fração de trajetórias que ainda permanecem em Γ no tempo n . Essa medida pode ser aproximada por

$$\tilde{\mu}_n(\Gamma) = \sum_{\mathbf{x}^* \in \Gamma}^{(n)} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)}, \quad (3.43)$$

sendo a soma sobre todos os pontos n -periódicos, exatamente como na equação (3.5). Como Γ contém uma sela caótica,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_n(\Gamma) = 0, \quad (3.44)$$

e, segundo a equação (3.42),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mu}_{n+1}(\Gamma)}{\tilde{\mu}_n(\Gamma)} = e^{-\gamma}. \quad (3.45)$$

A fim de se encontrar uma maneira sistemática de se calcular tal limite, convenientemente define-se a função

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}_n z^n, \quad (3.46)$$

dada pela soma de todas as medidas fornecidas pelos pontos de período n , ponderadas por um fator z^n . Como a comparação de (3.43) com (3.42) fornece

$$\tilde{\mu}_n(\Gamma) \approx e^{-\gamma n}, \quad (3.47)$$

a série em (3.46) pode ser resolvida:

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\gamma} z)^n = \frac{ze^{-\gamma}}{1 - ze^{-\gamma}}, \quad (3.48)$$

desde que $z < e^{\gamma}$. Uma vez que o somatório (3.46) diverge se os termos z^n forem maiores que $\tilde{\mu}_n$ para $n \gg 1$, dados pela equação (3.47), a definição da função (3.46) justifica-se pelo fato de que (3.48) diverge para $z = e^{\gamma}$, ou seja, a taxa de escape γ pode ser determinada pelo menor polo dessa expressão. É a existência da forma (3.48) para a divergência de (3.46) que permite a formulação da expansão em ciclos primos.

Note que os pontos fixos

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}^*) \quad (3.49)$$

podem ser pontos de período n ou período n_p tal que $n = kn_p$, sendo k um inteiro não negativo. Nesse caso, diz-se que o período primo de $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}_{n_p}^*$ é n_p , cuja órbita prima é dada por $\{\mathbf{f}^{(m)}(\mathbf{x}_{n_p}^*)\}_{m=0}^{n_p-1}$. As órbitas periódicas geradas por k repetições da órbita prima de $\mathbf{x}_{n_p}^*$ possuem autovalores dados por $\left[\eta(\mathbf{x}_{n_p}^*)\right]^k$ e, pela regra da cadeia, todos os pontos da mesma órbita possuem os mesmos autovalores. Assim, a expressão

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\mathbf{x}^* \in \Gamma} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)}, \quad (3.50)$$

obtida da substituição de (3.43) em (3.46), pode ser rearranjada em termos dos ciclos primos:

$$\hat{\mu}(z) = \sum_p n_p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z^{n_p}}{L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)} \right)^k, \quad (3.51)$$

sendo o primeiro somatório sobre *todas* órbitas periódicas primas, compostas de n_p pontos e $\mathbf{x}_{n_p}^*$ um ponto qualquer da órbita. O termo n_p provém do fato de que todos os pontos da mesma órbita contribuem com o mesmo fator para a medida, pois possuem exatamente o mesmo autovalor. A combinação dos dois somatórios em (3.51) ainda abrange *todos* os pontos periódicos contidos em Γ , apenas com a ordem dos somatórios alterada.

Fazendo uso do resultado (3.48) em (3.51), elimina-se a dependência em k e uma

expressão envolvendo apenas as órbitas periódicas primas é obtida:

$$\hat{\mu}(z) = \sum_p n_p \frac{z^{n_p}/L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)}{1 - z^{n_p}/L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)}. \quad (3.52)$$

Deve-se ressaltar que a soma em (3.52) envolve *todas* as órbitas de período primo. No desenvolvimento de (3.52) a partir de (3.46) nenhum termo dos somatórios envolvidos foi desprezado, portanto, a expressão (3.52) em termos dos ciclos primos é *exata*.

Como γ é determinado a partir de $z = e^\gamma$, tal que (3.52) diverge, é conveniente escrever esta expressão na forma

$$\hat{\mu}(z) = -z \frac{d}{dz} \sum_p \ln \left(1 - \frac{z^{n_p}}{L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)} \right). \quad (3.53)$$

Definindo o produto infinito

$$1/\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{z^{n_p}}{L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)} \right), \quad (3.54)$$

sendo o produtório sobre todas as órbitas de período primo, é possível encontrar z tal que (3.52) diverge através de $1/\zeta(z) = 0$ em (3.54). Por razões históricas, a função (3.54) é conhecida como função zeta de Γ ⁽¹¹⁾.

O produtório da função zeta pode ser expandido em somatórios agrupando-se as órbitas de mesmo período n_p :

$$1/\zeta(z) = 1 - \sum_{\mathbf{x}_1^* \in \Gamma} \frac{z}{L_i(\mathbf{x}_1^*)} - \sum_{\mathbf{x}_2^* \in \Gamma} \frac{z^2}{L_i(\mathbf{x}_2^*)} - \sum_{\mathbf{x}_3^* \in \Gamma} \frac{z^3}{L_i(\mathbf{x}_3^*)} - \dots \quad (3.55)$$

A expansão (3.55) assume a forma apresentada devido ao fato de que todos os ciclos de período n_p são ponderados pelo mesmo fator $z^{n_p}/L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)$, ou seja, os termos cruzados do produtório em (3.54) se cancelam exatamente. Uma vez que $L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*)$ cresce exponencialmente com n_p , a expansão (3.55) converge exponencialmente. Nos casos em que a matriz Jacobiana do mapa \mathbf{f} é constante e uniforme,

$$L_i(\mathbf{x}_{n_p}^*) = \exp \left(n_p \sum_{h_k > 0} h_k \right), \quad (3.56)$$

sendo h_k o k -ésimo expoente de Lyapunov do mapa, a taxa de convergência exponencial da

expansão (3.55),

$$\sum_{\mathbf{x}_{n+1}^* \in \Gamma} \frac{z^{n+1}}{Li(\mathbf{x}_{n+1}^*)} / \sum_{\mathbf{x}_n^* \in \Gamma} \frac{z^n}{Li(\mathbf{x}_n^*)} \approx e^{-\lambda}, \quad (3.57)$$

é dada por

$$\lambda \equiv -h_{\text{KS}}(\Gamma) = \gamma - \sum_{h_k > 0} h_k, \quad (3.58)$$

pois $z = e^\gamma$ e a entropia de Γ é relacionada aos expoentes de Lyapunov positivos e à taxa de escape pela equação (2.29).

4 As redes hiperbólicas - a sincronização de caos

Uma rede de mapas caóticos acoplados é caracterizada por dois componentes essenciais: a dinâmica local em cada sítio da rede, determinada por um mapa caótico, e a conectividade entre os sítios, determinada pela forma em que cada elemento da rede influencia na dinâmica de todos os outros sítios ⁽⁹⁾. Tais redes podem surgir da discretização do espaço e do tempo em um sistema governado por equações diferenciais parciais, como em problemas de física de fluidos, ou da construção direta de um sistema discreto, como a descrição de um gás de partículas interagindo apenas por colisões, sendo o tempo discretizado em termos das mesmas. Ainda, as redes de mapas caóticos acoplados podem ser utilizadas para criptografia em comunicação, por exemplo, uma vez que formam uma maneira sistemática de se construir sistemas caóticos de alta dimensionalidade ⁽⁹⁾.

Devido à ampla aplicabilidade das redes de mapas acoplados, muita atenção aos aspectos dinâmicos desses sistemas foi devotada nas últimas duas décadas. Entre os diversos fenômenos presentes nessas redes, como a supressão de caos, intermitência e estruturas fractais de alta dimensionalidade, a observação da sincronização de caos ganhou bastante destaque. Em poucas palavras, a sincronização ocorre quando todos os mapas da rede, apesar da natureza errática e instável de suas trajetórias quando desacoplados, passam a apresentar exatamente a mesma evolução temporal.

Neste capítulo, uma classe especial de redes será estudada: as redes hiperbólicas de mapas acoplados. Isso porque, como foi verificado nos capítulos 2 e 3, a maioria dos resultados formais para sistemas dinâmicos caóticos assumem a hiperbolicidade. Como ficará claro no capítulo 5, o estudo da sincronização de caos em redes hiperbólicas surge, nessa dissertação,

como um exemplo da aplicabilidade da teoria das órbitas periódicas em sistemas caóticos.

4.1 As redes hiperbólicas de mapas caóticos acoplados

Nos capítulos anteriores, diversas propriedades e resultados formalmente válidos para sistemas hiperbólicos foram expostos. Nesse trabalho serão considerados apenas mapas de Bernoulli linearmente acoplados em redes simétricas e periódicas. Isso porque é possível provar que tais redes são hiperbólicas e, portanto, pode-se fazer uso de todo o ferramental apresentado.

Considere um sistema dinâmico definido por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (4.1)$$

no qual \mathbf{x}_n é um vetor Ld -dimensional, cujos componentes são $x_n^{(l,m)}$ ($l = 0, 1, \dots, L-1; m = 0, 1, \dots, d-1$), \mathbf{A} é uma matriz $Ld \times Ld$ com coeficientes constantes e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é uma função vetorial Ld -dimensional, tal que¹

$$f^{(l,m)}(\mathbf{x}_n) = g^{(l,m)}(x_n^{(l,0)}, x_n^{(l,1)}, \dots, x_n^{(l,d-1)}), \quad (4.2)$$

e \mathbf{g} é um mapa d -dimensional caótico definido em $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$. A equação (4.1) define, portanto, uma rede Ld -dimensional de L mapas caóticos d -dimensional acoplados. Denomina-se a posição de cada um dos L mapas como um sítio da rede e diz-se que \mathbf{g} define a dinâmica local da rede. A matriz \mathbf{A} é dita matriz de acoplamento e é essa matriz que define a topologia da rede, determinando a conectividade entre os sítios.

Dependendo da forma de \mathbf{A} , o espaço de fase de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, Ω , pode ser escrito como $\Omega = \omega^L = \omega \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega$. A condição suficiente para que isso ocorra é

$$\sum_{k=0}^{L-1} [\mathbf{A}]_{j(kd+m)} = 1, \quad (4.3)$$

para quaisquer $j = 0, 1, \dots, Ld-1$ e $m = 0, 1, \dots, d-1$. Nessa dissertação apenas acoplamentos satisfazendo (4.3) serão considerados e, portanto, o espaço de fase em que a rede é definida é

¹Os limites para os índices são definidos de forma não usual e aparentemente não intuitiva de 0 à $L-1$, ao invés de 1 à L , por conveniência no tratamento subsequente.

dado por $\Omega = \omega^L$. Assim, diz-se que a rede (4.1) é hiperbólica se o espaço de fase Ω apresentar estrutura hiperbólica - ver seção 2.6.

No caso especial de mapas de Bernoulli acoplados, tem-se $d = 1$ e o mapa \mathbf{g} é dado pela equação (2.5):

$$g(x) = \beta x \bmod 1, \quad (4.4)$$

com $\omega = [0, 1)$, ou seja, $\Omega = [0, 1)^L$ e

$$\mathbf{x}_n \doteq \begin{bmatrix} x_n^{(0)} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(L-1)} \end{bmatrix}^T, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) &\doteq \begin{bmatrix} g(x_n^{(0)}) & g(x_n^{(1)}) & \cdots & g(x_n^{(L-1)}) \end{bmatrix}^T \\ &\doteq \beta \begin{bmatrix} x_n^{(0)} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(L-1)} \end{bmatrix}^T \bmod 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

na qual T representa transposição. A notação simplificada $x_n^{(l,0)} \equiv x_n^{(l)}$ é utilizada por se tratar de um mapa unidimensional. Assim, a rede (4.1) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_\beta(\mathbf{x}_n) = \beta \mathbf{A} [\mathbf{x}_n - \mathbf{k}_n], \quad (4.7)$$

na qual \mathbf{k}_n é um vetor L -dimensional que retém a ação do módulo 1, ou seja, $\beta k_n^{(l)}$ é um inteiro que satisfaz

$$0 \leq \beta(x_n^{(l)} - k_n^{(l)}) < 1. \quad (4.8)$$

Seja J o maior inteiro tal que $J < \beta$. Assim, os possíveis valores de $k_n^{(l)}$ são

$$k_n^{(l)} \in \left\{ \frac{j}{\beta} : j = 0, 1, \dots, J \right\}. \quad (4.9)$$

A imposição de que a rede seja periódica e simétrica, de modo que os sítios $l = 1$ e $l = L - 1$ influenciem identicamente o sítio $l = 0$, delimita a forma da matriz de acoplamento \mathbf{A} . Mais especificamente, a periodicidade e simetria da rede requerem que \mathbf{A} seja uma matriz circulante⁽¹⁶⁾ - vide apêndice A.

Uma vez que a rede (4.7) é linear por partes, a matriz Jacobiana da rede não depende

explicitamente da posição em que é calculada:

$$\mathbf{DF}_\beta(\mathbf{x}) = \beta \mathbf{A}. \quad (4.10)$$

Nesse caso, a matriz Jacobiana é exatamente a mesma em todos os pontos $\mathbf{x} \in \Omega$, pois o mapa de Bernoulli é linear por partes com inclinação β constante. Como \mathbf{A} é, por construção, circulante, $\mathbf{DF}_\beta(\mathbf{x})$ também o é. Assim, o espectro de autovalores da rede:

$$\eta_k = \beta \alpha_j \quad (k = 0, 1, \dots, L-1) \quad (4.11)$$

é conhecido, sendo

$$\alpha_j = \sum_{t=0}^{L-1} [\mathbf{A}]_{0t} e^{-(2\pi i) \frac{tj}{L}} \quad (4.12)$$

os autovalores de \mathbf{A} , dados pela equação (A.8), e os η_k ordenados de maneira decrescente em termos de suas magnitudes, exatamente como em (3.3).

Note que foi utilizado o fato de que o autovalor de uma matriz ($a\mathbf{A}$) é dado por $a\alpha_k$, sendo α_k o autovalor da matriz \mathbf{A} e a um escalar. Para cada autovalor η_k , existe um autovetor unitário \mathbf{a}_k associado, cujos componentes são dados pela equação (A.9):

$$a_k^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-(2\pi i)jk/L}. \quad (4.13)$$

O autovetor \mathbf{a}_k aponta em uma direção estável de $\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x})$ se $|\eta_k| < 1$ e em uma direção instável se $|\eta_k| > 1$. As dimensões estável, d_e , e instável, d_i , da rede são determinadas pelo número de autovalores η_k cuja magnitude é menor ou maior que a unidade, respectivamente.

Define-se então os subespaços tangentes estável $E_e(\mathbf{x})$ e instável $E_i(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x} \in \Omega$ como

$$E_i(\mathbf{x}) = \lim_{c_k \rightarrow 0} \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \sum_{k=0}^{d_i-1} c_k \mathbf{a}_k + \mathbf{x} \right\}, \quad (4.14)$$

$$E_e(\mathbf{x}) = \lim_{c_k \rightarrow 0} \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \sum_{k=L-d_e}^{L-1} c_k \mathbf{a}_k + \mathbf{x} \right\}. \quad (4.15)$$

Por definição, as variedades estável e instável de \mathbf{x} são tangentes à $E_e(\mathbf{x})$ e $E_i(\mathbf{x})$, respectivamente. Uma vez que os autovetores de uma matriz circulante são ortogonais entre si, não ocorrem tangências entre as variedades estável e instável.

Como a matriz Jacobiana (4.10) é igual para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, d_e e d_i são constantes para todos os pontos do espaço de fase, com $d = d_e + d_i$. Como os autovetores de (4.10) também são os mesmos para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, qualquer vetor

$$\mathbf{v} \in E_e(\mathbf{x})$$

é mapeado de tal modo que

$$\mathbf{F}_\beta(\mathbf{v}) \in E_e(\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x})),$$

e de maneira análoga para $\mathbf{v} \in E_i(\mathbf{x})$. Logo, a decomposição de $\mathcal{T}\Omega$ em dois subespaços $E_e(\mathbf{x})$ e $E_i(\mathbf{x})$ é consistente com a dinâmica. Assim, o espaço de fase Ω no qual a rede (4.7) é definida possui estrutura hiperbólica. Portanto, qualquer rede composta de L mapas de Bernoulli linearmente acoplados, cujo acoplamento é simétrico e periódico, é uma *rede hiperbólica*.

Durante todo o desenvolvimento, assumiu-se $|\eta_k| \neq 1$. Dependendo da forma de \mathbf{A} , é possível que existam um ou mais autovalores $\alpha_k = \pm\beta^{-1}$, de maneira que

$$|\eta_k| = 1. \quad (4.16)$$

Nesses casos, a rede não é hiperbólica devido à existência de uma direção central. A seguir será visto que, para o estudo da sincronização de caos nessa rede, a situação (4.16) nunca ocorre.

4.2 As formas de acoplamento

Como foi argumentado no início desse capítulo, uma rede de mapas acoplados é caracterizada por dois componentes: a dinâmica local e a topologia da rede. Na seção anterior, a hiperbolicidade de redes de mapas de Bernoulli acoplados foi verificada, fixando a dinâmica local para os mapas unidimensionais dados por (4.4). Ainda naquela seção, algumas imposições quanto à topologia da rede foram consideradas: o acoplamento deve ser linear, simétrico e periódico, de modo que a matriz de acoplamento \mathbf{A} em (4.1) seja circulante, e os componentes de \mathbf{A} devem satisfazer (4.3) para que $\Omega = \omega^L$. Mesmo diante dessas restrições, diversas topologias podem ser consideradas. Uma forma de acoplamento bastante interessante, por considerar a interferência de cada componente da rede como uma função da distância entre os sítios, ilus-

trada de maneira esquemática na figura 4.1, é dada por ⁽¹⁶⁻¹⁸⁾:

$$[\mathbf{A}]_{km} = (1 - \varepsilon)\delta_{km} + \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \left(\frac{1 - \delta_{km}}{r_{km}^\sigma} \right), \quad (4.17)$$

na qual $r_{km} \equiv \min\{|k - m|, |L - k + m|\}$ é a distância entre os sítios e $v(\sigma)$ é uma constante de normalização, dada por

$$v(\sigma) = 2 \sum_{t=1}^{L'} t^{-\sigma}, \quad (4.18)$$

com $L' \equiv (L - 1)/2$. A normalização garante que (4.3) seja satisfeita. ε caracteriza a intensidade do acoplamento, pois $\varepsilon = 0$ desacopla todos os sítios, e σ é dito o alcance do acoplamento. Percebe-se que nos casos limites $\sigma \rightarrow 0$ o acoplamento global é recuperado, com todos os sítios da rede contribuindo identicamente com o fator $\varepsilon/(L - 1)$, e no caso $\sigma \rightarrow \infty$ o acoplamento de primeiros vizinhos é recuperado, sendo que apenas os sítios adjacentes contribuem com $\varepsilon/2$.

Controlando os dois parâmetros da rede, ε e σ , é possível investigar a influência da intensidade da conectividade na dinâmica do sistema, sendo que nesse trabalho apenas o fenômeno da sincronização será analisado. Diversos outros tipos de acoplamento podem ser considerados, envolvendo outras formas de dependência com a distância, ou ainda, sistemas em que cada mapa é conectado apenas com uma fração dos sítios da rede, podendo estes serem os primeiros vizinhos ou distribuídos em toda a rede de alguma maneira sistemática ⁽⁹⁾.

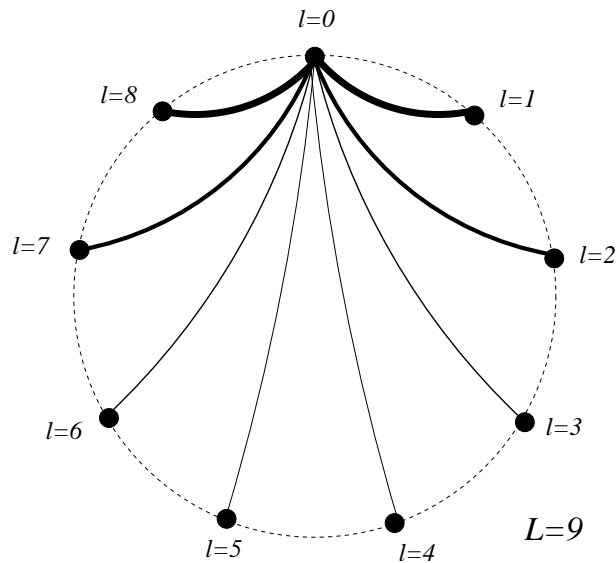


Figura 4.1: Ilustração pictórica da topologia da rede cuja intensidade do acoplamento decai com a distância entre os sítios, segundo uma lei de potência.

4.3 A sincronização

Nesta seção será desenvolvido um critério que caracteriza a sincronização na rede (4.1). Tal critério determina se um vetor de estado está ou não no estado sincronizado. Caso não esteja, quantifica quão dessincronizado o sistema está.

4.3.1 A distância à variedade de sincronização

A proximidade de uma trajetória ao estado sincronizado pode ser quantificada através da distância geométrica entre eles. Isso resulta da decomposição do vetor de estado \mathbf{x} em dois componentes:

$$\mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{n}_\perp) \mathbf{n}_\perp + (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{n}_\parallel) \mathbf{n}_\parallel, \quad (4.19)$$

sendo \mathbf{n}_\parallel um versor unitário contido em \mathcal{S} e \mathbf{n}_\perp um versor unitário perpendicular à \mathcal{S} . Por construção,

$$\mathbf{n}_\parallel \doteq \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.20)$$

no qual T representa transposição. Utilizando a norma Euclidiana² tem-se

$$|\mathbf{x}_n|^2 = \sum_{l=0}^{L-1} \left(x_n^{(l)} \right)^2 = (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{n}_\perp)^2 + (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{n}_\parallel)^2. \quad (4.21)$$

Evidenciando $(\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{n}_\perp) \equiv d_n$ nessa expressão e substituindo (4.20) em (4.19), encontra-se

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \sum_{l=0}^{L-1} \left(x_n^{(l)} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{L-1} x_n^{(l)} \right)^2 \\ &\Downarrow \\ d_n &= \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left(x_n^{(l)} \right)^2 - \left(\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} x_n^{(l)} \right)^2} \sqrt{L}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

O primeiro radicando nada mais é que a dispersão quadrática espacial entre os sítios da rede:

$$\chi_n^2 \equiv \left\langle (\mathbf{x}_n)^2 \right\rangle - \langle \mathbf{x}_n \rangle^2$$

²A escolha da norma é arbitrária para quantificar unicamente a distância ao estado sincronizado. A norma Euclidiana é utilizada apenas pelo apelo geométrico.

e, portanto, pode-se expressar a distância de um ponto da trajetória à variedade de sincronização em termos da raiz quadrada dessa dispersão:

$$\text{dist}(\mathbf{x}_n, \mathcal{S}) \equiv d_n = \chi_n \sqrt{L}. \quad (4.23)$$

Note que $d_n = 0$ implica $\chi_n = 0$ que implica sincronização, uma vez que

$$\chi_n = 0 \quad \Rightarrow \quad L \sum_{l=0}^{L-1} \left(x_n^{(l)} \right)^2 = \left(\sum_{l=0}^{L-1} x_n^{(l)} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad x_n^{(l)} = x_n^{(k)} \quad (4.24)$$

para quaisquer $l, k = 0, 1, \dots, L-1$.

4.4 A vizinhança linear da variedade de sincronização

O estado sincronizado é alcançado quando $d_n = 0$. Nesse caso, a variável de estado \mathbf{x}_n é determinada por

$$x_n^{(l)} = x_n^{(k)}. \quad (l, k = 0, 1, \dots, L-1) \quad (4.25)$$

Por construção, uma trajetória sincronizada no tempo n permanecerá sincronizada para qualquer tempo posterior. Isso porque o estado sincronizado definido por (4.25) é invariante devido à condição (4.3). O conjunto de pontos que caracterizam o estado sincronizado define a variedade de sincronização \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{x} : x^{(0)} = x^{(1)} = \dots = x^{(L-1)} \}, \quad (4.26)$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{S} = \{ \mathbf{x} : d = 0 \}$. A variedade de sincronização possui a mesma dimensão que os mapas \mathbf{g} que compõem a rede e, em \mathcal{S} , a dinâmica é unicamente determinada por esse mapa. Assim, uma trajetória está no estado sincronizado se, e somente se, $\mathbf{x}_n \in \mathcal{S}$. Mas, por construção, \mathcal{S} é invariante tanto para tempos futuros como para tempos passados, i. e., uma trajetória em \mathcal{S} não pode deixar o estado sincronizado mesmo para $n \rightarrow \pm\infty$. Por argumento inverso, uma trajetória *fora* de \mathcal{S} em um tempo n qualquer não poderá jamais estar em \mathcal{S} em um tempo posterior ou anterior. Ou seja, a rigor, uma vez que $\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{S}$, nunca se observa $\mathbf{x}_n \in \mathcal{S}$

para qualquer n , ou seja,

$$\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad d_n > 0 \quad \forall n. \quad (4.27)$$

O resultado (4.27) sugere que não há sentido em falar sobre sincronização caracterizada por $d_n = 0$, pois isso formalmente ocorre apenas para os casos triviais dados por $d_0 = 0$. A questão é que, sob certas circunstâncias, observa-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0. \quad (4.28)$$

Isto é, embora a trajetória nunca alcance o estado sincronizado, é possível que a distância entre ambos caia assintoticamente a zero. Identicamente quando a integral

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \quad (4.29)$$

é resolvida. A rigor, esta integral diverge, pois a área sob a curva determinada por e^{-x} é infinita, uma vez que e^{-x} jamais cruza o eixo das abscissas. Mas se a integral (4.29) for discretizada e decomposta em uma soma infinita,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\Delta x} \right)^m \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \frac{1}{1 - e^{-\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \frac{1}{1 - 1 + \Delta x} = 1, \end{aligned} \quad (4.30)$$

encontra-se uma série que converge. Logo, o resultado (4.29) é válido. Note que no limite $\Delta x \rightarrow 0$ as substituições feitas em (4.30) são formalmente válidas.

É conveniente, portanto, definir uma vizinhança Δ da variedade de sincronização como

$$\Sigma_\Delta = \{ \mathbf{x} : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) < \Delta \}, \quad (4.31)$$

na qual define-se a distância entre um ponto e um conjunto \mathcal{S} por

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \min \{ \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{S} \}. \quad (4.32)$$

Assim, define-se a *vizinhança linear* Σ de \mathcal{S} como sendo

$$\Sigma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Sigma_\Delta. \quad (4.33)$$

O fato de que em Σ a rede pode ser formalmente escrita como um mapa linear, cuja expansão em série de Taylor se dá em torno de \mathcal{S} , será explorado na próxima seção. Observe que Σ não é, necessariamente, um conjunto invariante e, portanto, é possível que trajetórias típicas da rede entrem e saiam de Σ com a evolução temporal do sistema.

Nas próximas seções, analisar-se-á a estabilidade, local e global, do estado sincronizado \mathcal{S} , a fim de determinar os critérios para a sincronização em uma rede de mapas de Bernoulli acoplados.

4.5 A estabilidade do estado sincronizado

Uma vez que buscam-se trajetórias que assintoticamente se aproximam de \mathcal{S} , é necessário determinar a estabilidade do estado sincronizado.

4.5.1 A estabilidade local - O espectro de expoentes de Lyapunov

O estado sincronizado \mathcal{S} é *localmente estável* se trajetórias em Σ aproximam-se de \mathcal{S} com a evolução temporal do sistema. Note que, em \mathcal{S} , a dinâmica pode ser decomposta em dois componentes, um longitudinal e outro transversal, exatamente como foi feito em (4.19). A dinâmica longitudinal é determinada pelos mapas desacoplados e, portanto, toda a análise da porção longitudinal do estado sincronizado já foi feita no capítulo 2.

A estabilidade local transversal de \mathcal{S} é totalmente caracterizada pelos expoentes de Lyapunov h_k calculados em \mathcal{S} nas direções transversais. Isso porque, por definição, os expoentes de Lyapunov quantificam a convergência ou divergência de perturbações infinitesimais, ou seja, perturbações transversais à \mathcal{S} , mas contidas em Σ .

Segundo a definição (2.13), o espectro de expoentes de Lyapunov³ da rede pode ser facilmente determinado, pois, devido à forma do acoplamento, a aproximação linear da rede em torno de \mathcal{S} é representada por uma matriz circulante⁽¹⁶⁾. Assim,

$$h_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{DF}_\beta^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k\|$$

³Ou, por simplicidade, espectro de Lyapunov

torna-se

$$h_k = \ln \|\mathbf{DF}_\beta(\mathbf{x})\mathbf{a}_k\| = \ln |\eta_k|, \quad (k = 1, \dots, L-1) \quad (4.34)$$

sendo os autovalores η_k dados por (4.11). Como \mathbf{a}_0 é o autovetor paralelo à \mathcal{S} , considera-se apenas $k = 1, \dots, L-1$ como sendo as $(L-1)$ direções transversais à \mathcal{S} .

A estabilidade de \mathcal{S} é então caracterizada pela condição

$$h_k < 0. \quad (k = 1, \dots, L-1) \quad (4.35)$$

Por definição, o estado sincronizado \mathcal{S} é estável se, e somente se, a condição (4.35) é satisfeita.

A partir de (4.34), pode-se encontrar a expressão para o espectro de Lyapunov da rede de mapas de Bernoulli acoplados considerada – equações (4.7) e (4.17). Substituindo-se as constantes de acoplamento (4.17) na expressão (A.8) para os autovalores de uma matriz circulante, chega-se à

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L-1} \left(\frac{1}{r_{t0}^\sigma} \right) e^{-(2\pi i)kt/L} \\ &= (1 - \varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L'} \left(\frac{1}{t^\sigma} \right) \cos \left(\frac{2\pi kt}{L} \right), \end{aligned}$$

na qual a simetria da rede foi utilizada. Uma vez que esses autovalores satisfazem

$$\alpha_1 = \alpha_{L-1} \geq \alpha_2 = \alpha_{L-2} \geq \dots \geq \alpha_{L'} = \alpha_{L'+1}, \quad (4.36)$$

sendo a degenerescência devida à simetria, tem-se

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta \alpha_1 \\ \eta_2 &= \beta \alpha_{L-1} \\ \eta_3 &= \beta \alpha_2 \\ \eta_4 &= \beta \alpha_{L-2} \\ &\vdots \\ \eta_k &= \begin{cases} \beta \alpha_{(k+1)/2} & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \beta \alpha_{L-k/2} & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

para os casos em que $|\alpha_{L'}| < |\alpha_1|$. Caso $|\alpha_{L'}| > |\alpha_1|$, o ordenamento dos autovalores é exatamente o inverso do apresentado em (4.37).

Portanto, o espectro de Lyapunov do estado sincronizado é

$$\begin{aligned} h_0 &= \ln \beta \\ h_k &= \ln \beta + \ln |(1 - \varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L'} \left(\frac{1}{t^\sigma} \right) \cos \left(\frac{\pi(k+1)t}{L} \right)| \quad (k \text{ ímpar}) \\ h_k &= \ln \beta + \ln |(1 - \varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L'} \left(\frac{1}{t^\sigma} \right) \cos \left(\frac{\pi(L-k)t}{L} \right)| \quad (k \text{ par}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo que todos os $k = 1, \dots, L-1$ representam direções transversais à \mathcal{S} e $h_0 = \ln \beta$ é o expoente de Lyapunov do mapa desacoplado. Caso $|\alpha_{L'}| > |\alpha_1|$, deve-se trocar $k \rightarrow L-k$ em (4.38).

De posse dos expoentes de Lyapunov transversais de \mathcal{S} , é possível determinar os valores de σ e ε que resultam em $h_k < 0$ ($k > 0$) para um dado tamanho de rede L . Para a rede considerada, essa análise foi feita por Anteneodo e colaboradores ⁽¹⁶⁾. Os valores críticos que caracterizam a transição da estabilidade de \mathcal{S} podem ser obtidos fazendo-se

$$h_1 = 0, \quad (4.39)$$

o que resulta em duas expressões para ε em função de β , σ e L :

$$\varepsilon_c = (1 - \beta^{-1}) / \left(1 - \frac{2}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L'} \frac{\cos(2\pi t/L)}{t^\sigma} \right) \quad (4.40)$$

$$\varepsilon'_c = (1 + \beta^{-1}) / \left(1 - \frac{2}{v(\sigma)} \sum_{t=1}^{L'} \frac{\cos(2\pi t L'/L)}{t^\sigma} \right), \quad (4.41)$$

obtidas simplesmente considerando a condição (4.39) em (4.38) para os dois ordenamentos possíveis dos autovalores em (4.37). Observe que os valores críticos dos outros parâmetros para que $h_1 = 0$ podem ser diretamente obtidos pela inversão das expressões (4.40) e (4.41).

Para a rede (4.7), o espectro de Lyapunov calculado para \mathcal{S} é, na verdade, o espectro de Lyapunov de qualquer trajetória em Ω , pois a rede é linear por partes e a matriz Jacobiana é dada por (4.10) independentemente da trajetória.

Os critérios de estabilidade desenvolvidos nessa seção consideram apenas a *estabilidade local* da variedade de sincronização, através do espectro dos expoentes de Lyapunov. Em princípio, a estabilidade local garante⁴ apenas que trajetórias na vizinhança Σ de \mathcal{S} finalmente alcançam o estado. De maneira geral, observa-se que, para diversos tipos de acoplamento e dinâmica local, a estabilidade local de \mathcal{S} coincide com a convergência de trajetórias típicas em Ω para o estado sincronizado ⁽⁹⁾.

Recentemente, Cencini e Torcini ⁽¹⁰⁾ investigaram numericamente a transição para o estado sincronizado da rede (4.7) em função da intensidade e alcance do acoplamento, bem como do número de mapas envolvidos, para $\beta = 1, 1$. Eles argumentam que, para redes formadas por mapas descontínuos acoplados, a estabilidade linear de \mathcal{S} não é suficiente para se garantir a observação da sincronização. Na seção seguinte, a análise da estabilidade *global* de \mathcal{S} será realizada e, através desta, serão determinados os intervalos de parâmetros para os quais a sincronização necessariamente é observada. Uma investigação detalhada da aparente discordância entre os resultados numéricos observados em ⁽¹⁰⁾ e a análise da estabilidade global do estado sincronizado será apresentada no capítulo 5.

4.5.2 A estabilidade global - A medida natural

Nesta seção serão determinados os critérios para que \mathcal{S} seja *globalmente estável*, ou seja, para que todas as trajetórias típicas em Ω assintoticamente tendam à \mathcal{S} . Esse resultado é possível devido à hiperbolicidade da rede, verificada na seção 4.1, e à expressão para a medida natural de um conjunto em termos das órbitas periódicas instáveis imersas nesse conjunto, dada pela equação (3.5).

O resultado apresentado aqui engloba a rede em estudo, mas é mais geral: abrange todas as redes hiperbólicas da forma (4.1) cujas matrizes \mathbf{A} são tais que o espaço de fase da rede Ω é dado por $\Omega = \omega^L$. Por simplicidade do tratamento, reserva-se a notação η_k para os $d(L-1)$ autovalores transversais ao estado sincronizado \mathcal{S} e denota-se por Λ_k os d autovalores

⁴A observação de sincronização nas trajetórias em Σ é garantida apenas para esse caso, uma vez que a rede é hiperbólica. Para sistemas não-hiperbólicos, a negatividade de todos os expoentes de Lyapunov transversais pode não ser suficiente para inferir a convergência dessas trajetórias.

associados às direções longitudinais. A variedade de sincronização \mathcal{S} agora é dada por

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} : x^{(0,k)} = x^{(1,k)} = \dots = x^{(L-1,k)}, k = 0, 1, \dots, d-1 \right\}. \quad (4.42)$$

Como em \mathcal{S} a dinâmica é determinada por

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{y}_n), \quad (4.43)$$

na qual $\mathbf{y} \in \omega$ e $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$, sendo \mathbf{g} é um mapa caótico e hiperbólico. Sejam

$$|\Lambda_0(\mathbf{y}^*)| \geq \dots \geq |\Lambda_{d_i}(\mathbf{y}^*)| > 1 > |\Lambda_{d-d_e}(\mathbf{y}^*)| \geq \dots \geq |\Lambda_{d-1}(\mathbf{y}^*)| \quad (4.44)$$

os autovalores ordenados decrescentemente por suas magnitudes de um ponto periódico instável $\mathbf{y}^* \in \mathcal{A}$, sendo $\mathcal{A} \subseteq \omega$ o atrator caótico de $\mathbf{g}(\mathbf{y})$. Em (4.44), d_e e d_i denotam, respectivamente, a dimensão estável e instável de \mathbf{y}^* , com $d_e + d_i = d$. O conjunto de pontos periódicos em \mathcal{A} é denso, por definição. Seja $\ell(\mathbf{y}^*)$ o produto das magnitudes dos autovalores instáveis de \mathbf{y}^* :

$$\ell(\mathbf{y}^*) = \prod_{k=0}^{d_i-1} |\Lambda_k(\mathbf{y}^*)|. \quad (4.45)$$

Como assume-se hiperbolicidade para \mathbf{g} , a expressão (3.5) é formalmente válida em ω e, para qualquer conjunto $\mathcal{B} \subseteq \omega$, é verdade que

$$\mu(\mathcal{B}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{B}} \frac{1}{\ell(\mathbf{y}^*)}, \quad (4.46)$$

sendo que a soma estende-se sobre todos os pontos p -periódicos de \mathbf{g} contidos em \mathcal{B} . Por definição, encontra-se

$$\mu(\mathcal{A}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{A}} \frac{1}{\ell(\mathbf{y}^*)} = 1 \equiv \mu(\omega). \quad (4.47)$$

Considere agora uma rede composta de L mapas $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ acoplados. O espaço de fase é dado por $\Omega = \omega^L$. Como assume-se (4.1) hiperbólica, a expressão (3.5) também é formalmente válida em Ω . Seja \mathbf{x}^* um ponto periódico da rede pertencente à \mathcal{S} , ou seja, \mathbf{x}^* é um ponto em Ω composto de L repetições de \mathbf{y}^* . Todos os pontos periódicos $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ possuem $D \equiv d(L-1)$ direções transversais, às quais podem ser associados os seguintes autovalores ordenados por sua

magnitude,

$$|\eta_0(\mathbf{x}^*)| \geq \dots \geq |\eta_{D_i}(\mathbf{x}^*)| > 1 > |\eta_{D-D_e}(\mathbf{x}^*)| \geq \dots \geq |\eta_{D-1}(\mathbf{x}^*)|, \quad (4.48)$$

sendo D_i e D_e o número de direções transversalmente instáveis e estáveis em \mathcal{S} , respectivamente, com $D = D_e + D_i$.

Agora, segundo (3.1), escreve-se

$$L_i(\mathbf{x}^*) = \ell(\mathbf{y}^*) \prod_{k=0}^{D_i} |\eta_k(\mathbf{x}^*)| \quad (4.49)$$

como o produto de *todos* os autovalores instáveis do ponto periódico $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$. Note que o termo $\ell(\mathbf{y}^*)$ considera os autovalores instáveis de \mathbf{x}^* nas direções longitudinais.

A partir das órbitas periódicas instáveis contidas em \mathcal{S} , pode-se determinar uma expressão para a medida da vizinhança linear Σ de \mathcal{S} . A dinâmica em Σ já é conhecida pela análise linear feita na seção anterior. Substituindo-se (4.49) em (3.5) para Σ , obtém-se

$$\mu(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}^* \in \Sigma} \frac{1}{L_i(\mathbf{x}^*)}, \quad (4.50)$$

sendo que a soma se estende sobre todos os pontos fixos da rede (4.1) contidos em Σ . Uma vez que a rede é hiperbólica e \mathcal{S} é invariante, pode-se fazer $\Delta \rightarrow 0$ em (4.33) de maneira que todos os pontos periódicos da rede estejam contidos em \mathcal{S} . Logo, pode-se escrever

$$\mu(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{y}^* \in \omega} \left(\frac{1}{\ell(\mathbf{y}^*)} \right) \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{D_i} |\eta_k(\mathbf{x}^*)|} \right), \quad (4.51)$$

na qual entende-se que \mathbf{x}^* é um vetor composto por L repetições de \mathbf{y}^* .

Assim, a equação (4.51) fornece uma expressão para a medida da vizinhança linear do estado sincronizado. Segundo a definição 1, a medida $\mu(\Sigma)$ representa a fração de tempo que uma trajetória típica do sistema permanece em Σ . Para que Σ seja globalmente estável, é necessário que $\mu(\Sigma) = 1$. Comparando (4.51) com (4.47), observa-se que

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{D_i} |\eta_k(\mathbf{x}^*)|} = 1 \quad (\forall \mathbf{x}^* \in \Sigma) \quad (4.52)$$

implica

$$\mu(\Sigma) = \mu(\omega) = 1, \quad (4.53)$$

ou seja, a vizinhança de \mathcal{S} é globalmente estável se *todas* as órbitas periódicas de \mathcal{S} forem transversalmente estáveis. Uma vez que a rede é assumida hiperbólica, se $|\eta_0(\mathbf{x}^*)| < 1$ para algum $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$, então $|\eta_0(\mathbf{x}^*)| < 1$ para qualquer $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$.

Este resultado demonstra que se (4.52) é satisfeita, então $\mu(\Sigma)$ é globalmente estável. Mas observe que (4.52) implica $D_i = 0$, o que implica $h_1 < 0$ e coincide com a condição (4.35) para a estabilidade local de \mathcal{S} . Ou seja, se $D_i = 0$, *todas* as trajetórias típicas em Ω assintoticamente tenderão à Σ . Como \mathcal{S} é localmente estável em Σ , *todas* as trajetórias típicas de Σ assintoticamente tenderão à \mathcal{S} . Portanto, para redes hiperbólicas de mapas caóticos acoplados, a estabilidade local de \mathcal{S} , caracterizada pela negatividade de todos os expoentes de Lyapunov transversais, implica *estabilidade global* do estado sincronizado. Esse é um dos principais resultados desse trabalho.

Como consequência direta, as expressões (4.40) e (4.41) determinam os parâmetros críticos para que *todas* as trajetórias típicas da rede (4.7) sincronizem. No capítulo seguinte será explorado o porquê de simulações numéricas aparentemente contradizerem esse resultado.

5 As redes hiperbólicas - os transientes

No capítulo anterior, as condições para a sincronização de caos em redes hiperbólicas foram determinadas através da análise da estabilidade global do estado sincronizado em função das órbitas periódicas imersas na variedade de sincronização \mathcal{S} . Neste capítulo, uma realização de rede hiperbólica dada por L mapas de Bernoulli linearmente acoplados, com interações de longo alcance decaindo com a distância entre os sítios como uma lei de potência, será investigada em detalhes. Mais especificamente, a rede

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (5.1)$$

com \mathbf{A} definido na equação (4.17),

$$[\mathbf{A}]_{km} = (1 - \varepsilon)\delta_{km} + \frac{\varepsilon}{v(\sigma)} \frac{(1 - \delta_{km})}{r_{km}^\sigma}, \quad (k, m = 0, 1, \dots, L-1) \quad (5.2)$$

$v(\sigma)$ dado por (4.18) e a dinâmica local determinada pelo mapa de Bernoulli, equação (2.5),

$$f^{(k)}(\mathbf{x}) = \beta x^{(k)} \bmod 1, \quad (\mathbf{x} \in \Omega = [0, 1)^L) \quad (5.3)$$

será analisada. Os critérios (4.40) e (4.41) serão verificados numericamente e a discrepância entre os resultados apresentados por Cencini e Torcini ⁽¹⁰⁾ e as expressões analíticas do capítulo 4 será elucidada em termos das órbitas periódicas instáveis da rede.

5.1 O tempo de sincronização

As simulações computacionais envolvendo a sincronização obedecem o seguinte algoritmo:

1. L condições iniciais $y_0^{(k)}$ são sorteadas aleatoriamente com probabilidade uniforme no intervalo $[0, 1)$;
2. Cada $y_0^{(k)}$ é iterado T_w vezes com o mapa de Bernoulli, equação (2.5), a fim de se obter uma condição inicial para o vetor de estado da rede respeitando a medida do mapa desacoplado;
3. O vetor de estado da rede é determinado por $x_0^{(k)} = y_{T_w}^{(k)}$;
4. A rede (5.1) é iterada até que $d_n < \theta_q$, quando infere-se a sincronização, ou até que $n > T_{\max}$, quando diz-se que a sincronização não foi observada.

O passo 2 é considerado para que o vetor de estado inicial \mathbf{x}_0 represente uma condição inicial típica da rede. Para mapas de Bernoulli, nos quais o atrator caótico preenche todo o espaço de fase $\omega = [0, 1)$, tomar um conjunto de condições iniciais aleatórias em ω pode não representar uma amostragem real do espaço de fase, uma vez que a densidade $\rho(x)$ é tipicamente não uniforme¹, mas certamente todas as trajetórias consideradas são típicas. Nos casos em que o atrator caótico \mathcal{A} não preenche todo o espaço de fase ω , a simples escolha aleatória de \mathbf{x}_0 pode representar uma condição inicial *atípica*. Os parâmetros $T_w = 10^w$ e $\theta_q = 10^{-q}$ são escolhidos de maneira a se obter uma aproximação satisfatória dos limites $T_w \rightarrow \infty$ e $\theta_q \rightarrow 0$. Nessa dissertação, a “aproximação satisfatória” para T_w foi a seguinte: considere a densidade $\rho_n(x)$ determinada numericamente para um conjunto de milhares de condições iniciais iteradas até o tempo n , como foi feito na figura 2.3. Por construção, $\rho_0(x) = 1$. Define-se portanto T_w como o menor inteiro que satisfaz

$$\int_{\omega} |\rho_{T_{w-1}}(x) - \rho_{T_w}(x)| dx \approx \int_{\omega} |\rho_{T_w}(x) - \rho_{T_{w+1}}(x)| dx, \quad (5.4)$$

ou seja, T_w é o número de iteradas necessárias para a distribuição inicial $\rho_0(x)$ relaxar para o estado estacionário. Tipicamente, para o mapa de Bernoulli, $w = 3$ é suficiente. T_{\max} é um parâmetro de corte devido à limitação computacional. Com os computadores comerciais de hoje, é possível fazer simulações envolvendo bilhões de iteradas em apenas alguns minutos.

¹Sendo uniforme apenas para $\beta \in \mathbb{N}$ com $\beta > 1$.

Note que $\theta_q \rightarrow 0$ recupera a definição da vizinhança linear (4.33) de \mathcal{S} . Como em Σ a dinâmica transversal à \mathcal{S} é dominada pelos autovalores da matriz Jacobiana, é verdade que

$$d_{n+m} = d_n e^{-m|h_1|}, \quad (5.5)$$

para $\mathbf{x}_n \in \Sigma$. Assim, define-se θ_q como o maior valor para o qual a relação (5.5) seja válida para todo $m > 0$ e $d_n < \theta_q$. Tipicamente, θ_q é uma função da dinâmica local, do tamanho da rede e da forma e intensidade do acoplamento. Nas simulações em que não for indicado o contrário, foram utilizados $w = 3$, $q = 10$ e $T_{\max} = 10^{10}$.

Na figura 5.1, a série temporal de d_n para uma condição inicial típica está representada para três alcances de acoplamento distintos. A intensidade do acoplamento ε foi determinada de modo a fixar o maior expoente de Lyapunov transversal, h_1 , como sendo $h_1 = -0,02$. Esse critério, embora arbitrário, fornece uma sistemática para comparar, qualitativamente e quantitativamente, os diferentes sistemas definidos por pares distintos de parâmetros (ε, σ) . A dinâmica transversal em Σ é dominada por h_1 e, portanto, equivalente para todos os sistemas. O fato comum aos três casos, indicados na figura 5.1, é que a trajetória oscila de forma errática por um certo tempo até que d_n decresça monotonicamente a zero.

O tempo necessário para que d_n alcance θ_q é definido como *tempo de sincronização* t_s . Atente para o fato que em 5.1(c) as primeiras 13000 iteradas da rede foram omitidas para não sobrecarregar a figura. Fica claro que t_s depende dos parâmetros da rede. Quando outras condições iniciais são utilizadas, mesmo determinadas segundo o mesmo algoritmo, o tempo de sincronização observado pode variar, embora o comportamento observado seja qualitativamente o mesmo do apresentado na figura 5.1.

O tempo de sincronização ou, mais especificamente, o tempo de sincronização médio, $\langle t_s \rangle$, é uma quantidade dinâmica relevante na análise de redes de mapas acoplados. No caso de um experimento, esse seria o tempo necessário para que o sistema relaxasse ao estado de comportamento espacial sincronizado.

Embora \mathcal{S} seja globalmente estável, a trajetória permanece distante, e por alguns instantes de tempo, se distanciando, do estado sincronizado. Esse comportamento está evidente nas

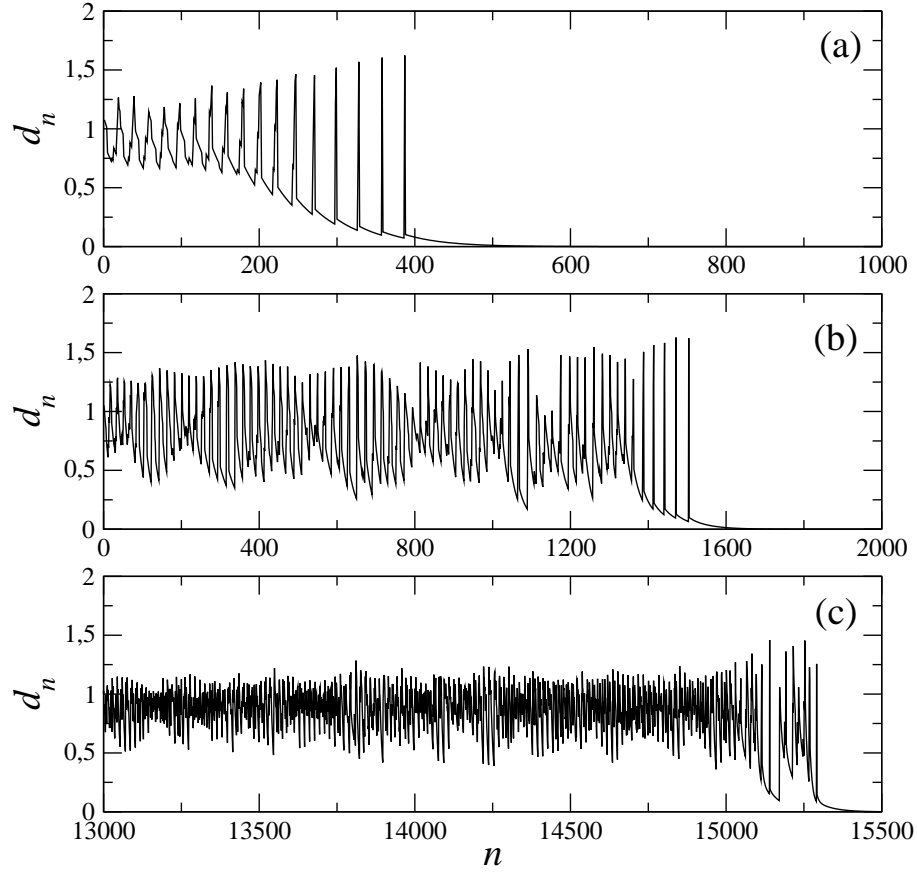


Figura 5.1: A série temporal de d_n para $L = 15$ e $\beta = 1,1$ com (a) $\sigma = 0,00$, (b) $\sigma = 0,50$ e (c) $\sigma = 1,00$, sendo ε ajustado para que $h_1 = -0,02$.

três situações apresentadas na figura 5.1 e será investigado em detalhes nas próximas seções.

A dependência de $\langle t_s \rangle$ com os parâmetros da rede pode ser observada na figura 5.2, para $L = 15$ e $\beta = 1,1$ fixados. A curva crítica dada por (4.40) está indicada pela interface entre as regiões colorida e branca. Observe que, próximo a essa curva, $h_1 \lesssim 0$. Uma vez que a distância à variedade de sincronização diminui, no máximo, a uma taxa exponencial dada por $|h_1|$, o tempo de sincronização próximo à curva é grande quando comparado com acoplamentos mais intensos, dados por $\varepsilon \approx 0,50$, nesse caso. Note também que $\langle t_s \rangle$ varia suavemente em todo o espaço de parâmetros acima da curva crítica ε_c . Isso é uma consequência direta da hiperbolicidade da rede.

O que é intrigante no resultado da figura 5.2 é a existência de valores grandes para $\langle t_s \rangle$ mesmo para pares de parâmetros (ε, σ) distantes da curva $\varepsilon_c(\sigma)$, região na qual os expoentes de Lyapunov transversais de \mathcal{S} são todos negativos e distantes de zero.

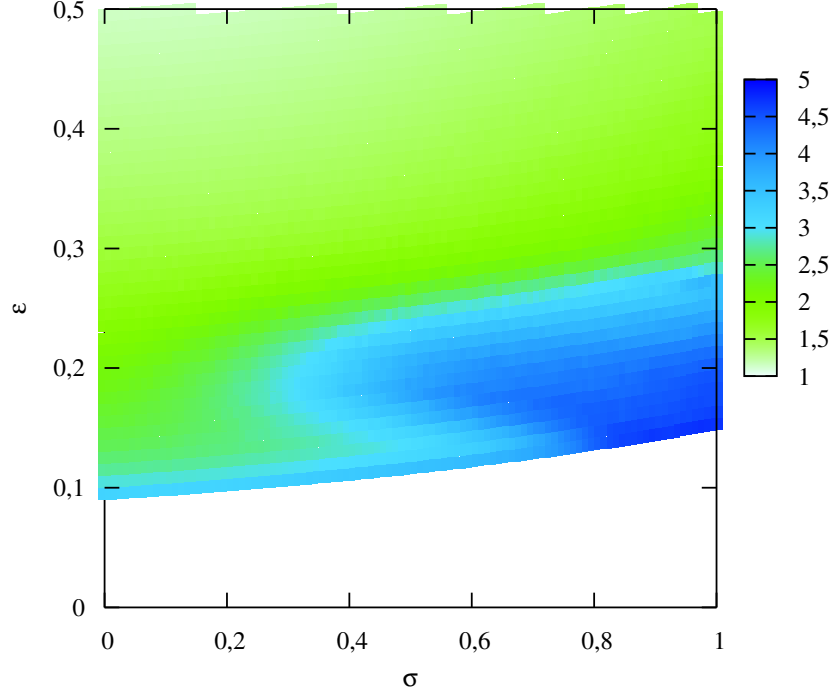


Figura 5.2: O tempo de sincronização médio $\log_{10} \langle t_s \rangle$, indicado na escala de cores, em função do acoplamento ε e do alcance σ para $L = 15$ e $\beta = 1, 1$. A região em branco não pertence à região de sincronização, pois nela $h_1 > 0$.

5.2 A taxa de escape

Nesta seção, a hipótese da natureza topológica dos grandes tempos de sincronização observados na figura 5.2 será levantada. Como verificado na seção 4.5, a rede (5.1) é linear por partes e o espectro de Lyapunov (4.38) é o mesmo para qualquer trajetória em Ω , não apenas para as trajetórias no estado sincronizado. Ou seja, as trajetórias representadas na figura 5.1 também possuem

$$h_0 = \ln \beta > 0. \quad (5.6)$$

Embora a direção instável dessas trajetórias dessincronizadas seja paralela à \mathcal{S} , a positividade de um dos expoentes de Lyapunov indica que elas são instáveis. Note que $h_0 > 0$ e o caráter errático de d_n na figura 5.1, aparentemente aleatório, sugerem que essas trajetórias

são caóticas. Isto é, sabe-se que uma vez sincronizada, a trajetória fica limitada à variedade de sincronização, na qual, por construção, existe o atrator caótico do mapa desacoplado. Mas o comportamento das trajetórias na figura 5.1 e a condição (5.6) indicam comportamento caótico mesmo fora do estado sincronizado.

Considere que a trajetória seja caótica² e que os parâmetros da rede são ajustados para que \mathcal{S} seja globalmente estável, conforme análise da seção 4.5. Seja também $\Gamma = \Omega - \Sigma$ todo o espaço de fase da rede, exceto a vizinhança linear de \mathcal{S} . Assim, o tempo de sincronização t_s pode ser caracterizado como o tempo em que a trajetória permanece em Γ . Como Σ é uma região invariante, pois \mathcal{S} é invariante e estável em Σ , qualquer trajetória que deixa Γ jamais retorna. Tem-se, portanto, a seguinte situação: toda trajetória típica em Ω finalmente e assintoticamente se aproximará de \mathcal{S} , mas durante um tempo t_s , que pode variar de trajetória para trajetória, as trajetórias comportam-se de maneira errática em Γ . Como as trajetórias nunca retornam à Γ , observa-se que a dinâmica em Γ satisfaz os pré-requisitos para que exista um conjunto $\mathcal{G} \subset \Gamma$ tal que \mathcal{G} seja uma sela caótica - a definição de sela caótica, bem como suas propriedades, é dada na seção 2.4. Desse modo, o tempo de sincronização, t_s , pode ser considerado o tempo transiente de uma trajetória em uma sela caótica. Isto é, o comportamento errático de d_n na figura 5.1 seria associado ao caos transiente na sela \mathcal{G} . Uma vez que Γ contém uma sela caótica, é verdade que, para $N_0(\Gamma) \gg 1$ condições iniciais uniformemente distribuídas em Γ , tem-se (2.28):

$$N_n(\Gamma) \propto e^{-\gamma n}, \quad (n \gg 1) \quad (5.7)$$

sendo $N_n(\Gamma)$ o número de trajetórias que permanecem em Γ após n iteradas e γ a taxa de escape de Γ , dada pela equação (2.29):

$$\gamma = \sum_{h_k > 0} h_k - h_{KS}. \quad (5.8)$$

O decaimento exponencial do número de trajetórias em Γ é tipicamente observado. Na figura 5.3, $N_n(\Gamma)$ como uma função de n está indicado para os mesmos parâmetros utilizados na

²Como foi exposto no capítulo 2, caos está associado à positividade de dois expoentes críticos: o expoente de Lyapunov e a entropia-KS. O comportamento errático das trajetórias indicadas na figura 5.1 sugere entropia positiva. Na seção seguinte, através da expansão em ciclos primos da seção 3.4, a positividade da entropia será demonstrada.

figura 5.1. Nota-se que, para $n \gg 1$, o decaimento é exponencial, fornecendo mais um indicativo da existência de uma sela caótica \mathcal{G} em Γ . As linhas tracejadas na figura 5.3 são relativas ao ajuste de (5.7) pelo método dos mínimos quadrados, desconsiderando-se as primeiras iteradas em que o comportamento é não exponencial.

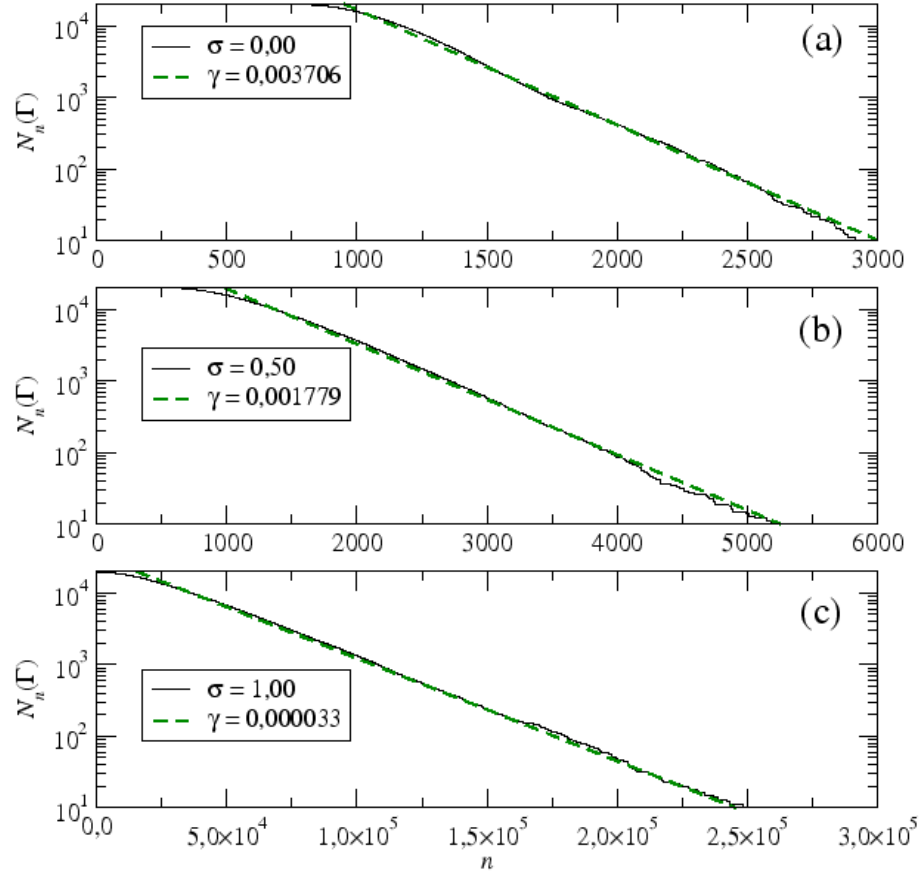


Figura 5.3: O número de trajetórias no estado dessincronizado em função do tempo n , para 2×10^4 condições iniciais e os mesmos parâmetros da figura 5.1: $L = 15$ e $\beta = 1, 10$, σ indicado na legenda e ε ajustado para que $h_1 = -0,02$.

A taxa de escape γ foi calculada através do ajuste de (5.7) para todo o intervalo de parâmetros em que $\langle t_s \rangle$ foi determinado na figura 5.2 e o resultado está indicado na figura 5.4, sendo $\log_{10} \gamma$ dado pela escala de cores. Os valores de $\gamma > 10$ foram omitidos para evidenciar na escala de cores o comportamento mais próximo à curva crítica ε_c , novamente indicada pela interface entre a região inferior branca e a colorida.

Percebe-se a semelhança entre as figuras 5.2 e 5.4, tanto nos padrões apresentados quanto nos valores, sendo uma o negativo da outra, justificando assim a escolha da escala logarítmica na base 10 para γ . Na verdade, o tempo de sincronização está diretamente relacionado

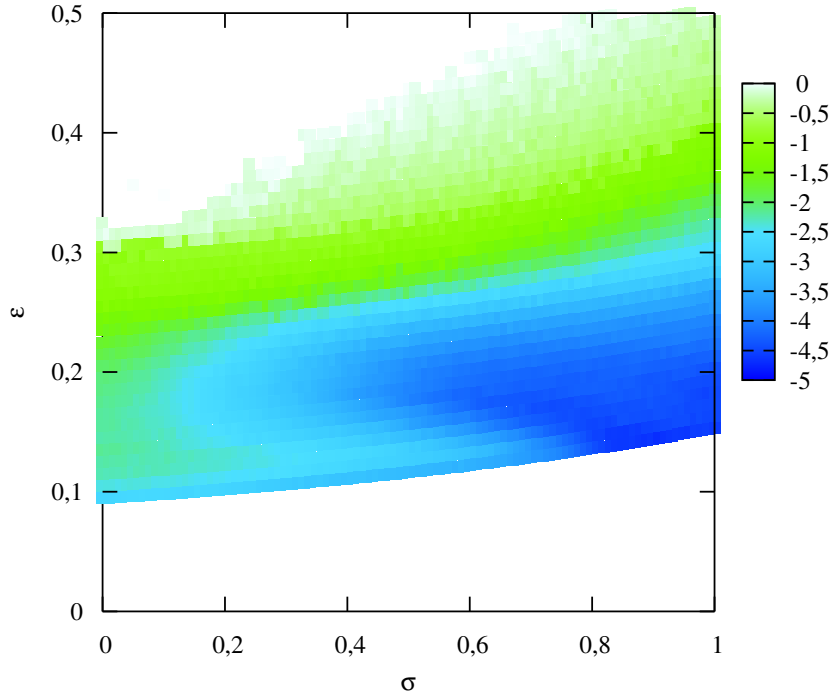


Figura 5.4: O logaritmo da taxa de escape, $\log_{10} \gamma$, indicado em escala de cores, calculado no espaço de parâmetros $\epsilon \times \sigma$ para $L = 15$ e $\beta = 1, 10$. Os valores com $\gamma > 10$ não estão indicados.

com a taxa de escape γ , uma vez que, como indicado na equação (2.31),

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\gamma}, \quad (5.9)$$

é o tempo de vida médio de uma trajetória em uma sela caótica. A expressão (5.9) pode ser obtida através do seguinte cálculo:

Seja p_n a probabilidade de se observar a sincronização de uma trajetória típica no tempo n . Segundo (5.7), para n grande, esta probabilidade é

$$p_n = \kappa \frac{N_n(\Gamma) - N_{n+1}(\Gamma)}{N_0(\Gamma)} = \kappa (1 - e^{-\gamma}) e^{-\gamma n}, \quad (5.10)$$

na qual κ é uma constante de normalização. Assumindo que a probabilidade p_n seja dada por

(5.10) para todo n , κ é obtida por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_n &= 1 \\ \Downarrow \\ \kappa &= \frac{1}{(1 - e^{-\gamma})} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\gamma})^n \right)^{-1} = e^{\gamma} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$p_n = (e^{\gamma} - 1) e^{-\gamma n}. \quad (5.11)$$

Logo, o tempo de sincronização esperado é

$$\begin{aligned} \langle t_s \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = (e^{\gamma} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} n (e^{-\gamma})^n \\ \langle t_s \rangle &= (e^{\gamma} - 1) \left(\frac{e^{-\gamma}}{(1 - e^{-\gamma})^2} \right) = \frac{1}{1 - e^{-\gamma}} = \frac{e^{\gamma}}{e^{\gamma} - 1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como $\gamma \approx 0$, expande-se e^{γ} até primeira ordem em γ e a relação

$$\langle t_s \rangle = \frac{1 + \gamma}{\gamma} \approx \frac{1}{\gamma}, \quad (\gamma \approx 0) \quad (5.13)$$

é recuperada. O resultado (5.13) é obtido através da aproximação de p_n por (5.11) para todo n , embora seja formalmente válida apenas para $n \gg 1$. Os resultados da figura 5.3 sugerem que esta aproximação é válida, pois a região em que $N_n(\Gamma)$ difere de (5.7) é pequena, principalmente para γ pequenos.

Como γ é uma quantidade dinâmica fundamental que caracteriza uma sela caótica \mathcal{G} , (5.13) fornece um resultado característico da rede, o tempo médio de sincronização, em termos de uma quantidade intrínseca do sistema.

O tempo de sincronização médio $\langle t_s \rangle$ também pode ser obtido diretamente de simulações utilizando um grande número de trajetórias típicas da rede, como foi feito na figura 5.2. Mas esse método envolve um parâmetro arbitrário: o tamanho da vizinhança linear θ_q . Especialmente para simulações com $h_1 \lesssim 0$, essa escolha pode influenciar, em ordens de grandeza, a determinação de $\langle t_s \rangle$. Isso porque, nas vizinhanças de \mathcal{S} , a distância entre a trajetória e a va-

riedade de sincronização cai exponencialmente à taxa dada por $|h_1|$. Seja Δ o tamanho real da vizinhança linear de \mathcal{S} , isto é, todos os pontos fixos \mathbf{x}^* contidos em Σ_Δ pertencem à \mathcal{S} , e seja θ_q o critério para a sincronização escolhido para uma simulação, com $\theta_q < \Delta$. Como em Σ_Δ a dinâmica é formalmente dominada pelo termo linear, a distância d_n obedece

$$d_{n+T} = d_n e^{-|h_1|T}. \quad (5.14)$$

Fazendo-se $d_n = \Delta$ e $d_{n+T} = \theta_q$ em (5.14), obtém-se o número de iteradas adicionais T consideradas em $\langle t_s \rangle$:

$$T = \frac{1}{|h_1|} \ln \left(\frac{\Delta}{\theta_q} \right). \quad (5.15)$$

Uma vez que $\mathbf{x}^* \in \Sigma_\Delta$ implica sincronização, estas T iteradas da rede não devem ser consideradas no tempo de sincronização. Devido à T ser inversamente proporcional à $|h_1|$, a subestimação de Σ_Δ pode acarretar $\langle t_s \rangle$ superestimado para $|h_1| \approx 0$.

A determinação de $\langle t_s \rangle$ através de (5.13) é insensível ao tamanho de θ_q , desde que, é claro, $\theta_q < \Sigma_\Delta$, mesmo que γ seja determinado numericamente, como foi feito na figura 5.3, pois a subestimação de θ_q apenas desloca a curva, mantendo sua inclinação constante. Nas próximas seções, a teoria de órbitas periódicas, desenvolvida no capítulo 3, será utilizada para determinar a taxa de escape de Γ sem o cálculo de médias sobre longas trajetórias típicas da rede, formalmente comprovando a hipótese de que os altos tempos de sincronização observados são devidos ao caos transiente da sela caótica $\mathcal{S} \subset \Gamma$.

5.3 As órbitas periódicas instáveis da rede

Nesta seção será realizada a determinação dos pontos de período p da rede de mapas de Bernoulli acoplados, equação (4.7). Uma solução exata para esses pontos será derivada, a qual resultará também na expressão para a partição geratriz de Ω , e o método de detecção de Schmelcher e Diakonov⁽¹⁴⁾ será implementado para essa rede.

5.3.1 A expressão geral

Um ponto periódico da rede satisfaz a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}_{n+p} = \mathbf{F}_\beta^{(p)}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n, \quad (5.16)$$

sendo $\mathbf{F}_\beta^{(p)}(\mathbf{x}_n)$ a representação para p aplicações da rede (5.1) em \mathbf{x}_n . Utilizando a notação definida em (4.7), a equação (5.16) torna-se

$$\mathbf{x}_{n+p} = \beta^p \mathbf{A}^p \mathbf{x}_n - \sum_{m=1}^p (\beta \mathbf{A})^m \mathbf{k}_{p-m} = \mathbf{x}_n. \quad (5.17)$$

Como um ponto de período p também é solução de (5.16) com $p \rightarrow rp$ para qualquer $r \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\mathbf{x}_{rp} = (\beta \mathbf{A})^{rp} \mathbf{x}_0 - \left(\sum_{s=0}^{r-1} (\beta \mathbf{A})^{sp} \right) \sum_{m=1}^p (\beta \mathbf{A})^m \mathbf{k}_{p-m} = \mathbf{x}_0, \quad (5.18)$$

na qual, por simplicidade e sem perda de generalidade, fez-se $n = 0$. Definindo

$$\mathbf{H} \equiv \beta \mathbf{A} \quad (5.19)$$

e evidenciando \mathbf{x}_0 em (5.18), obtém-se

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})^{-1} \sum_{s=0}^{r-1} \mathbf{H}^{sp} \sum_{m=1}^p \mathbf{H}^m \mathbf{k}_{p-m}. \quad (5.20)$$

Seja agora \mathbf{P} uma transformação de similaridade tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} = \mathbf{H}_D, \quad (5.21)$$

cujas matriz \mathbf{H}_D é diagonal, com seus elementos dados pelos autovalores de \mathbf{H} . Ou seja, \mathbf{P} é composta dos autovetores de \mathbf{H} arranjados em colunas. Atuando com

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{1} = \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}$$

em (5.20) e observando que, uma vez que \mathbf{H} é circulante, \mathbf{H}^k também o é e, por sua vez, também $(\mathbf{H}^k - \mathbf{1})^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{1}(\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1} \sum_{s=0}^{r-1} \mathbf{H}^{sp} \mathbf{1} \sum_{m=1}^p \mathbf{H}^m \mathbf{k}_{p-m} \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{P} \left(\sum_{s=0}^{r-1} (\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})_D^{-1} \mathbf{H}_D^{sp} \right) \mathbf{P}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^p \mathbf{H}^m \mathbf{k}_{p-m} \right\},\end{aligned}\quad (5.22)$$

na qual $(\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})_D^{-1}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $(\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})^{-1}$. Em (5.22) o fato exposto no apêndice A de que todas as matrizes circulantes possuem o mesmo conjunto de autovetores foi utilizado. Uma vez que

$$\left[(\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})_D^{-1} \mathbf{H}_D^{sp} \right]_{lm} = \delta_{lm} \left(\frac{\eta_m^{sp}}{\eta_m^{rp} - 1} \right), \quad (5.23)$$

sendo η_m o m -ésimo autovalor de \mathbf{H}_D^3 , os componentes da matriz resultante do termo entre parênteses na equação (5.22) são dados por

$$\left[\sum_{s=0}^{r-1} (\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})_D^{-1} \mathbf{H}_D^{sp} \right]_{lm} = \delta_{lm} \sum_{s=0}^{r-1} \left(\frac{(\eta_m^p)^s}{(\eta_m^p)^r - 1} \right). \quad (5.24)$$

Como a expressão (5.18) deve ser válida para qualquer $r \in \mathbb{N}$, faz-se $r \rightarrow \infty$ em (5.24) para se eliminar a dependência em r . Existem duas possibilidades, $|\eta_m| < 1$ e $|\eta_m| > 1$, mas ambas resultam na mesma expressão em termos do m -ésimo autovalor de \mathbf{H} :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left(\frac{(\eta_m^p)^s}{(\eta_m^p)^r - 1} \right) = \frac{1}{\eta_m^p - 1}. \quad (5.25)$$

Assim, tem-se a igualdade

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=0}^{r-1} (\mathbf{H}^{rp} - \mathbf{1})_D^{-1} \mathbf{H}_D^{sp} \right) = \mathbf{M}_D^{(p)}, \quad (5.26)$$

sendo os componentes de $\mathbf{M}_D^{(p)}$ dados por:

$$[\mathbf{M}_D^{(p)}]_{lm} = \frac{\delta_{lm}}{\eta_m^p - 1}. \quad (5.27)$$

³Estes autovalores são exatamente os mesmos que em (4.11).

Portanto, (5.22) pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\mathbf{M}_D^{(p)} \sum_{m=1}^p \mathbf{H}_D^m \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{p-m}. \quad (5.28)$$

Uma vez que \mathbf{P} é composta dos autovetores da rede, os componentes de $\mathbf{M}_D^{(p)}$ e \mathbf{H}_D^m são compostos apenas dos autovalores da rede e \mathbf{k}_m pode assumir os valores estipulados em (4.9), a expressão (5.28) fornece a solução de todos os pontos de período p da rede (4.7).

Como o vetor \mathbf{k}_m representa a ação do módulo na m -ésima iterada da rede, os componentes de todos os vetores $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1}^p$ não são independentes entre si. Em princípio, a determinação de um dado ponto periódico $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0$ através de (5.28) requer o conhecimento *a priori* de $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1}^p$, que é possível apenas se \mathbf{x}^* já for conhecido. Mas isso não invalida a expressão (5.28). É possível utilizá-la para se obter *todos* os pontos de período p ao se considerar todas as possíveis combinações $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1}^p$ e verificar, uma a uma, se resulta ou não em uma solução de (5.16). Esse procedimento, embora resulte no conjunto correto e completo de pontos p -periódicos, pode não ser viável para grandes redes e/ou períodos muito altos, pois existem⁴ J^{Lp} combinações possíveis dos p vetores \mathbf{k}_m L -dimensionais.

A expressão (5.28) fornece um resultado muito importante para a análise da seção subsequente. Se um conjunto $\pi_s^{(p)} = \{\mathbf{k}_j\}_{j=1}^p$ em (5.28) especifica uma solução de (5.16), essa especificação é biunívoca: $\pi_s^{(p)}$ determina um, e somente um, ponto fixo da rede e cada ponto fixo é representado por um, e somente um, conjunto $\pi_s^{(p)}$. Ou seja, a expressão (5.28) fornece uma maneira biunívoca de se associar um símbolo, $\pi_s^{(p)}$, a um ponto periódico da rede. Portanto, (5.28) define uma partição geratriz para $\mathbf{F}_\beta : \Omega \rightarrow \Omega$.

Da análise da expressão para a medida de Σ obtida no capítulo 4 resulta um limite superior para o número de símbolos $\pi_s^{(p)}$ possíveis, em função do número de pontos p -periódicos existentes em Γ . Uma vez que, para a rede em questão com os parâmetros em que \mathcal{S} é globalmente estável, para um dado período p , tem-se

$$L_i(\mathbf{x}_0) = \beta^p$$

⁴Exatamente como em (4.9), J é dado pelo maior inteiro que satisfaz $J < \beta$.

para todas as soluções \mathbf{x}_0 de (5.28), a expressão para a medida de Γ em termos de suas órbitas periódicas instáveis, dada por (3.5), torna-se

$$\mu(\Gamma) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}_0 \in \Gamma} \frac{1}{\beta^p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P_p(\Gamma)}{\beta^p}, \quad (5.29)$$

sendo $P_p(\Gamma)$ o número de pontos p -periódicos contidos em Γ . Como \mathcal{S} é globalmente estável, tem-se

$$\mu(\Gamma) = 0, \quad (5.30)$$

pois $\Omega = \Sigma + \Gamma$ e $\mu(\Omega) = 1 = \mu(\Sigma)$. Ainda prosseguindo com a hipótese de que existe uma sela caótica \mathcal{G} contida em Γ , é verdade que

$$P_p(\Gamma) \propto e^{h_T(\Gamma)p}, \quad (5.31)$$

sendo $h_T(\Gamma)$ a entropia topológica de $\mathcal{G} \subset \Gamma$. Substituindo (5.31) em (5.29) e considerando o resultado (5.30), chega-se à

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{h_T(\Gamma)}}{\beta} \right)^p = 0, \quad (5.32)$$

e, portanto,

$$h_T(\Gamma) < \ln \beta \equiv h_T(\Sigma). \quad (5.33)$$

Como a expressão (5.28) associa um símbolo $\pi_s^{(p)}$ a cada ponto p -periódico, a expressão (5.31) juntamente com (5.33) fornece um limite superior para o número de símbolos possíveis, ou seja, certamente observa-se, para $p \gg 1$,

$$P_p(\Gamma) < e^{h_T(\Sigma)p} = \beta^p. \quad (5.34)$$

Assim, dos J^{Lp} símbolos possíveis $\pi_s^{(p)}$ determinados por (5.28), para $p \gg 1$, apenas uma porção menor que β^p fornece pontos p -periódicos da rede. Note que existem exatamente⁵ $\beta^p - 1$ símbolos $\pi_s^{(p)}$ que resultam em pontos periódicos contidos em \mathcal{S} . Portanto, para redes grandes, a determinação dos pontos periódicos da rede a partir de (5.28) torna-se impraticável, pois existem aproximadamente $J^{p(L-2)}$ símbolos $\pi_s^{(p)}$ que não resultarão em pontos periódicos.

⁵Este número é exato somente para $p \rightarrow \infty$. Para p finito, $P_p(\Sigma) \approx \beta^p$.

5.3.2 Detecção numérica

Uma vez que se deseja encontrar as órbitas periódicas de \mathbf{F}_β em Γ , mas a utilização de (5.28) é limitada devido ao custo computacional, o conjunto de pontos p -periódicos pode ser encontrado através do método exposto na seção 3.3. Para isso, faz-se a análise da estabilidade dos pontos fixos de (3.29), que são, por construção, pontos de período p da rede (4.7). Através dessa análise, a matriz de estabilização \mathbf{O} e o parâmetro ς podem ser determinados, de modo que se \mathbf{x}^* é um ponto p -periódico instável de \mathbf{F}_β , então \mathbf{x}^* é um ponto fixo estável de (3.29):

$$\mathbf{s}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varsigma \mathbf{O}_k \left[\mathbf{F}_\beta^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \right]. \quad (5.35)$$

A matriz Jacobiana do sistema transformado \mathbf{s}_k é dada pela equação (3.34),

$$\mathbf{D}\mathbf{s}_k \equiv \mathbf{J} = \mathbf{1} + \varsigma \mathbf{O}_k (\mathbf{H}^p - \mathbf{1}) \quad (5.36)$$

sendo $\mathbf{H} = \beta \mathbf{A}$ e \mathbf{A} a matriz de acoplamento (4.17), exatamente como na seção anterior. A matriz de estabilização \mathbf{O}_k é dada por

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{O}_{Dk} \mathbf{P}, \quad (5.37)$$

na qual \mathbf{O}_D é dada por (3.33) e \mathbf{P} é a transformação de similaridade que diagonaliza $(\mathbf{H}^p - \mathbf{1})$, ou seja, é composta dos autovetores de uma matriz circulante $L \times L$, exatamente como na seção anterior e como foi desenvolvido no apêndice A. Substituindo-se (5.37) em (5.36) e fazendo uso da identidade $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{1} = \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}$, obtém-se

$$\mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \equiv \mathbf{J}_D = \mathbf{1} + \varsigma \mathbf{O}_{Dk} (\mathbf{H}_D^p - \mathbf{1}), \quad (5.38)$$

na qual \mathbf{J}_D e \mathbf{H}_D^p são matrizes diagonais cujos elementos são os autovalores de \mathbf{J} e \mathbf{H}^p , respectivamente. Dessa maneira, os autovalores de \mathbf{J} são obtidos diretamente de (5.38):

$$\vartheta_m \equiv [\mathbf{J}_D]_{mm} = 1 + \varsigma o_k^{(m)} (\eta_m^p - 1), \quad (5.39)$$

sendo $o_k^{(m)} = \pm 1$, definidos na seção 3.3. Para que um ponto fixo \mathbf{x}^* seja estável no sistema transformado \mathbf{s}_k , é necessário que $|\vartheta_m| < 1$ para $m = 0, 1, \dots, L-1$. Isso delimita a forma de

\mathbf{O}_{Dk} da seguinte maneira:

- Caso $\eta_m > 1$, faz-se $o_k^{(m)} = 1$;
- Caso $\eta_m < -1$, faz-se $o_k^{(m)} = (-1)^{p+1}$
- Caso $|\eta_m| < 1$, faz-se $o_k^{(m)} = 1$.

Nos casos em que \mathcal{S} é globalmente estável, sempre se observa

$$\eta_0 = \beta > 0 \quad \text{e} \quad |\eta_k| < 1, \quad (k = 1, \dots, L-1)$$

e, portanto, a matriz que estabiliza todos os pontos periódicos de \mathbf{F}_β é

$$\mathbf{O}_{Dk} \stackrel{\circ}{=} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Assim, recuperando \mathbf{O}_k a partir de (5.37), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_k &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{O}_{Dk} \mathbf{P} \\ &\Downarrow \\ [\mathbf{O}_k]_{ab} &= \sum_{m=0}^{L-1} [\mathbf{P}^{-1}]_{am} [\mathbf{O}_{Dk} \mathbf{P}]_{mb} \\ [\mathbf{O}_k]_{ab} &= \delta_{ab} - 2/L, \end{aligned} \quad (5.41)$$

utilizando o fato de que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\dagger$, sendo \dagger o símbolo para matriz transposta e conjugada, e que os componentes de \mathbf{P} são dados no apêndice A por:

$$[\mathbf{P}]_{ab} = \frac{e^{-(2\pi i)ab/L}}{\sqrt{L}}. \quad (5.42)$$

De posse dos elementos da matriz \mathbf{O}_k , ou equivalentemente, da matriz \mathbf{O}_{Dk} , o valor ótimo de ς é determinado fazendo

$$|t_0| = |t_1|, \quad (5.43)$$

na qual ι_m representa o m -ésimo autovalor de \mathbf{J} , ϑ_k , ordenado de maneira decrescente, segundo a sua magnitude.

Para $p \gg 1$, o ordenamento de ϑ_k é igual ao de η_k^p , ou seja,

$$\iota_k = \vartheta_k, \forall k, \quad (5.44)$$

pois $|\eta_m^p| \rightarrow 0$ para $m \neq 0$ e, portanto, o valor de ς que otimiza a detecção é obtido a partir da equação (3.39):

$$\begin{aligned} |\vartheta_0| &= |\vartheta_1| \\ |1 - \varsigma_o(\eta_0^p - 1)| &= |1 + \varsigma_o(\eta_1^p - 1)| \\ \Downarrow \\ \varsigma_o &= \frac{2}{\beta^p - \eta_1^p}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

sendo $\eta_0 = \beta$ e $\varsigma = 0$ é desprezado, pois inviabiliza a detecção. Assim, para uma dada precisão ψ , o tempo estimado para a detecção, t_D , é dado pela substituição de (5.45) em ϑ_0 e fazendo-se $h_0 = \ln \vartheta_0$ em (3.38):

$$t_D \approx \frac{\ln(\sqrt{L}/\psi)}{\ln[1 - \varsigma_o(\beta^p - 1)]}, \quad (5.46)$$

cujo termo \sqrt{L} é a maior distância possível em Ω .

A detecção então é feita de acordo com o seguinte algoritmo:

1. Dados os parâmetros da rede, L , σ e ε , e o período p , a matriz estabilização \mathbf{O}_k é determinada e o parâmetro ς_o é calculado a partir de (5.45);
2. O tempo de iteração do método é calculado a partir de (5.46);
3. Um número máximo m_{\max} de sementes é estabelecido e $m := 0$; repete-se o passo 4 até que $m = m_{\max}$;
4. Sorteia-se a m -ésima condição inicial aleatória $\mathbf{x}_0(m)$ e o sistema \mathbf{s}_k dado por (5.35) é iterado n vezes, até que

- $|\Delta \mathbf{x}_n(m) \equiv \mathbf{x}_{n+1}(m) - \mathbf{x}_n(m)| < \psi$

Avança ao passo 5.

- $n = t_D$ Nesse caso, $m := m + 1$ e retorna-se ao passo 4.

5. O ponto detectado $\mathbf{x}_n(m)$ é comparado com todos os pontos previamente determinados. Se $|\mathbf{x}_n(m) - \mathbf{x}_n(j)| > \psi$ para todo j , então o ponto fixo $\mathbf{x}_n(m)$ é contabilizado e $m := 0$. Retorna ao passo 4.

Nesse algoritmo, ψ representa a precisão desejada para a detecção, tipicamente $\psi \sim 10^{-16}$ (precisão dupla) e m_{\max} é o número de sementes utilizadas sem a detecção de nenhum novo ponto periódico para que se considere a detecção completa. Usualmente, $m_{\max} \sim 10^3$, mas deve-se notar que qualquer $m_{\max} < \infty$ não garante a detecção completa dos pontos periódicos.

Esse algoritmo foi implementado para encontrar os pontos de período p da rede (4.7) com os parâmetros utilizados na figura 5.1, para $p \leq 30$. Os pontos periódicos detectados estão indicados nas figuras 5.5(a)-(c), sendo que todos os pontos de uma órbita p -periódica estão representados pela mesma cor. De acordo com a distribuição desses pontos periódicos no espaço de fase, pode-se estimar a localização bem como a topologia da sela caótica \mathcal{G} . Como todos os pontos possuem o mesmo autovalor instável $\eta_0 = \beta^p$, a medida de qualquer porção do espaço de fase C_k que não interseccione com Σ será dada em função do número de pontos p -periódicos contidos em C_k , no limite $p \rightarrow \infty$. Portanto, a distribuição das órbitas periódicas em Γ fornece a distribuição da medida da sela, ou seja, quais regiões serão visitadas, e com qual frequência, por trajetórias que ainda estão no estado dessincronizado.

O resultado apresentado na figura 5.5(a)-(c) é mais um indicativo de que os longos tempos de sincronização observados são devidos à existência de uma sela caótica em Γ . Uma maneira mais direta de evidenciar a influência dessas órbitas periódicas nas trajetórias típicas do estado dessincronizado é dada na figura 5.5(d): para cada um dos pontos p -periódicos detectados, a distância $d = \text{dist}(\mathbf{x}^*, \mathcal{S})$ foi calculada. Essas distâncias foram indexadas por m de maneira crescente, segundo o período da órbita e, então, segundo a ordem de detecção.

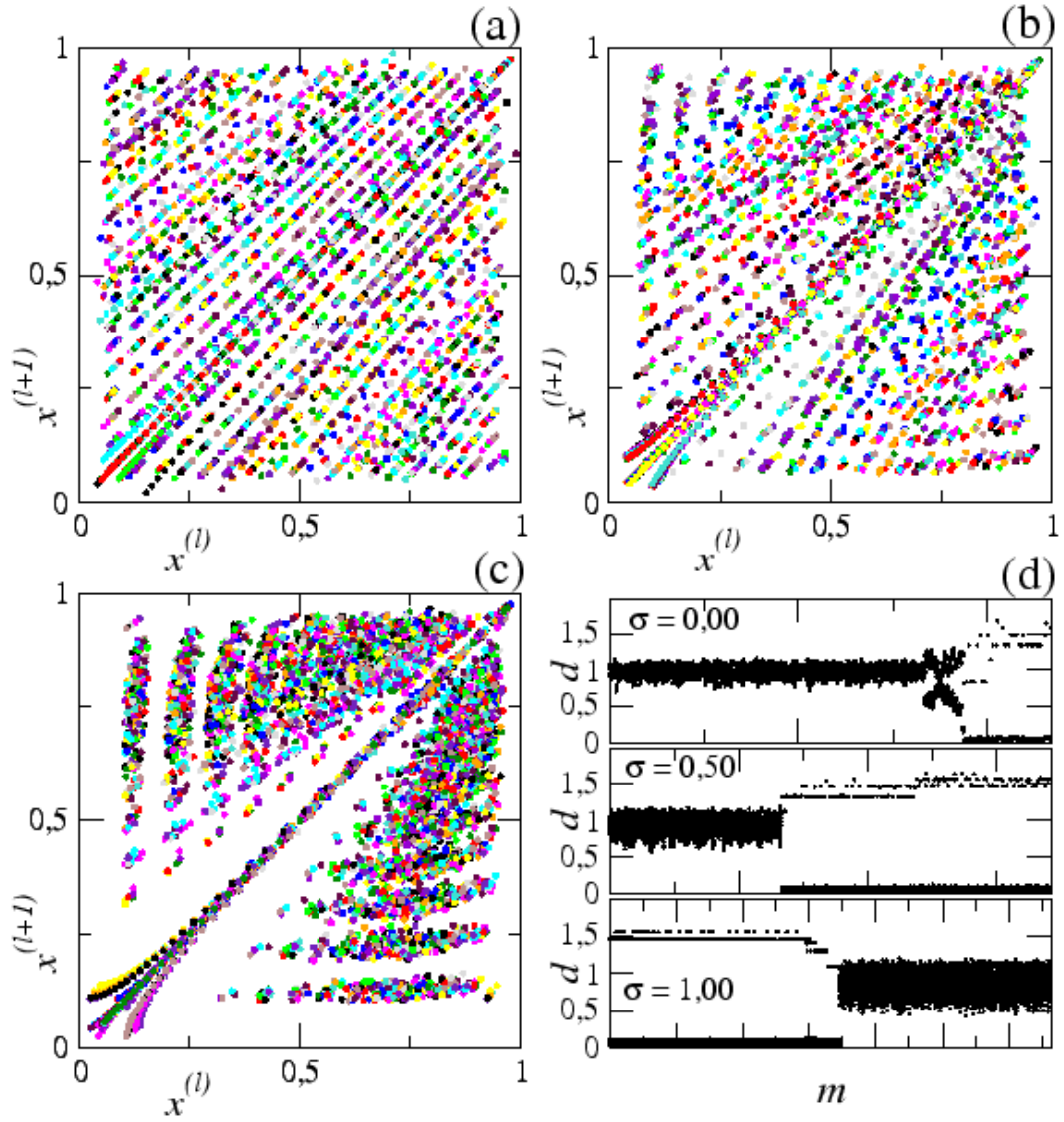


Figura 5.5: A projeção dos pontos detectados com período $p \leq 30$ no plano $x^{(l)} \times x^{(l+1)}$ para $L = 15$ e $\beta = 1, 10$, sendo ε ajustado para que $h_1 = -0.02$ para (a) $\sigma = 0.00$, (b) $\sigma = 0.50$ e (c) $\sigma = 1.00$. Todos os pontos de uma mesma órbita estão indicados por uma mesma cor. (d) A distância entre cada ponto p -periódico e a variedade de sincronização \mathcal{S} para os pontos das figuras (a), (b) e (c). Os pontos foram indexados por m em ordem crescente do período.

Deve-se fazer a comparação dos resultados em 5.5(d) para os três valores de alcance, $\sigma = \{0.00; 0.50; 1.00\}$, com as séries temporais da distância ao estado sincronizado das trajetórias típicas indicadas na figura 5.1. A semelhança qualitativa é evidente, embora os resultados indicados na figura 5.5(d) não representam uma série temporal típica de d_n para a rede.

Heuristicamente, a semelhança entre esses dois resultados pode ser justificada pelo fato de que, uma condição inicial típica em Γ estará, invariavelmente, na vizinhança de algum ponto periódico \mathbf{x}^* . Por um período de tempo, geralmente alguns múltiplos do período do

ponto, a trajetória típica “acompanhará” a órbita periódica de \mathbf{x}^* . Mas, como todos os pontos periódicos em Γ são instáveis, a trajetória típica acaba se afastando dessa órbita periódica. Como existe⁶ um conjunto denso de pontos periódicos em Γ , ao se afastar da órbita de \mathbf{x}^* , a trajetória típica se aproximará de um outro ponto periódico $\mathbf{x}^{*'}$, pertencente a outra órbita periódica. Assim, espera-se que a série temporal de d_n para uma trajetória típica seja uma combinação de trechos da figura 5.5(d), exatamente como é observado. Nota-se que até mesmo o comportamento aparentemente intermitente, em que a trajetória típica ora permanece próxima ao estado sincronizado, ora se distancia com $d_n \approx \mathcal{O}(1)$, pode ser explicado observando o fato de que existem órbitas periódicas em Γ tal que $d_m \approx 0$ e $d_l \approx \mathcal{O}(1)$ para

$$d_k = \text{dist} \left(\mathbf{F}_\beta^{(k)}(\mathbf{x}^*), \mathcal{S} \right),$$

e $0 \leq m, l < p$, sendo p o período de \mathbf{x}^* . Isto é, os picos de d_n observados nas séries temporais da figura 5.1 também podem ser compostos de trechos da figura 5.5(d).

A argumentação heurística apresentada tem um suporte teórico bastante forte: o sombreamento de trajetórias típicas⁽¹¹⁾. Segundo a equação (5.28), cada símbolo $\pi_s^{(p)}$ especifica uma órbita p -periódica. Mas a evolução de uma trajetória típica por n iteradas também gera uma sequência simbólica:

$$\Pi^{(n)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}\}. \quad (5.47)$$

Se $\Pi^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ puder ser escrito como

$$\Pi^{(n)}(\mathbf{x}_0) = \{\pi_s^{(p)}, \pi_{s'}^{(p)}, \dots, \pi_{s''}^{(p)}\}, \quad (5.48)$$

diz-se que a trajetória iniciada em \mathbf{x}_0 é sombreada pelas órbitas periódicas s, s', \dots, s'' durante n iteradas. Como todas as trajetórias típicas finalmente escapam de Γ e, por construção, todas as órbitas periódicas de \mathcal{G} possuem todos seus componentes em Γ , o sombreamento (5.48) não pode ocorrer para $n \rightarrow \infty$. Mas, enquanto a trajetória típica permanece em Γ , ou seja, enquanto o sistema está no estado dessincronizado, o transiente pode ser sombreado por órbitas

⁶Formalmente, apesar de todos os indícios apresentados, ainda não foi comprovada a existência da sela caótica \mathcal{G} e, portanto, ainda não se pode afirmar que existe um conjunto denso de pontos periódicos em Γ . Isto será feito na próxima seção. Exatamente como foi feito até aqui, trabalha-se com a *hipótese* da existência de tal sela caótica.

periódicas instáveis. Se o particionamento do espaço de fase determinado por (5.28) fosse Markoviano, a sentença anterior deveria ser alterada para: o transiente é *sombreado* por órbitas periódicas instáveis. Mas, devido à argumentação apresentada na dedução do limite (5.33) para a entropia topológica de \mathcal{G} , sabe-se que existem diversas seqüências simbólicas $\pi_s^{(p)}$ que não geram pontos periódicos, mas que não são seqüências proibidas do sistema, ou seja, embora $\pi_s^{(p)}$ não represente uma órbita periódica, esta seqüência pode estar presente na expansão (5.48). Uma vez que o número de pontos p -periódicos em Γ , $P_p(\Gamma)$, cresce exponencialmente com o período, a utilização de períodos maiores na geração da figura 5.5(d) resultaria na ampliação das possibilidades de sombreado $\pi_s^{(p)}$. No limite $p \rightarrow \infty$, existem infinitas órbitas periódicas e, portanto, infinitas seqüências $\pi_s^{(p)}$. Como nenhuma trajetória típica permanece em Γ para $n \rightarrow \infty$, $\Pi^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ é sempre finito. Assim, *qualquer* seqüência típica $\Pi^{(n)}(\mathbf{x}_0)$ pode ser representada como uma fração de uma seqüência periódica $\pi_s^{(p)}$ com $p \rightarrow \infty$, pois, nesse limite, as seqüências $\pi_s^{(p)}$ que não geram soluções de (5.28) são, necessariamente, seqüências proibidas do sistema.

Em resumo, os resultados apresentados para as órbitas periódicas detectadas numericamente são suficientes para a verificação qualitativa da existência da sela caótica em Γ . Também verificam que o caráter errático, observado na figura 5.1, é devido ao sombreado de órbitas periódicas instáveis contidas em Γ . A expressão obtida na seção anterior, equação (5.28), garante que esses resultados são formalmente válidos no limite $p \rightarrow \infty$. Como foi exposto na seção 3.4, pode-se elegantemente contornar esse limite através da expansão em ciclos primos, que será realizada na próxima seção.

5.4 A taxa de escape - expansão em ciclos primos

Nesta seção, a taxa de escape de Γ será calculada a partir das órbitas periódicas contidas em Γ . Uma vez que a determinação dos pontos p -periódicos da rede (5.1) é essencialmente numérica, a utilização da expressão (3.20) é limitada devido à requisição de $p \rightarrow \infty$ e, portanto, recorre-se à expansão em ciclos primos exposta na seção 3.4. Como já foi verificado, a expressão (5.28) especifica um símbolo biunivocamente a cada ponto periódico da rede. Note que todos os pontos periódicos \mathbf{x}_k^* de uma mesma órbita p -periódica possuem seus símbolos

relacionados por

$$\pi_{s,k}^{(p)} = \left\{ \mathbf{k}_{(m+k) \bmod p} \right\}_{m=0}^{p-1}. \quad (5.49)$$

Assim, a expansão (3.55) torna-se

$$\frac{1}{\zeta(z)} = 1 - \sum_{\pi_{s,0}^{(1)}} \frac{z}{\beta} - \sum_{\pi_{s,0}^{(2)}} \frac{z^2}{\beta^2} - \sum_{\pi_{s,0}^{(3)}} \frac{z^3}{\beta^3} - \cdots, \quad (5.50)$$

na qual os somatórios se estendem sobre todos os símbolos compostos de p vetores \mathbf{k} e o fato de que $L_i(\mathbf{x}_p^*) = \beta^p$, para os casos em que se observa sincronização, foi utilizado. Devido à (5.49), cada órbita contribui apenas com o termo $\pi_{s,0}^{(p)}$ na expressão (5.50). A taxa de escape de Γ é então determinada através de

$$\gamma = \ln z_0, \quad (5.51)$$

sendo z_0 o menor valor de $z \in \mathbb{R}_+$ tal que $1/\zeta(z_0) = 0$ - vide seção 3.4. A contribuição de cada termo da série (5.50) é exponencialmente menor que seu predecessor e, tipicamente, o truncamento para os primeiros períodos fornece um resultado satisfatório.

A associação simbólica aos pontos periódicos detectados é facilmente implementada definindo os $\pi_s^{(p)}$ como sendo um número inteiro I , cuja expansão na base J é dada por

$$I_{10} = (k_0^{(0)} k_0^{(1)} \cdots k_0^{(L-1)} k_1^{(0)} k_1^{(1)} \cdots k_1^{(L-1)} \cdots k_{p-1}^{(0)} k_{p-1}^{(1)} \cdots k_{p-1}^{(L-1)})_J. \quad (5.52)$$

Assim, por conveniência, define-se $\pi_{s,0}^{(p)}$ como a sequência que gera o menor inteiro I na expansão (5.52). Definindo-se $K(p)$ como o número de sequências primas $\pi_{s,0}^{(p)}$ de comprimento p , a função zeta é dada por

$$\frac{1}{\zeta_p(z)} = 1 - K(1) \frac{z}{\beta} - K(2) \frac{z^2}{\beta^2} - K(3) \frac{z^3}{\beta^3} - \cdots - K(p) \frac{z^p}{\beta^p}, \quad (5.53)$$

sendo que $1/\zeta_p(z)$ representa que a expansão é truncada em ordem z^p .

A partir das órbitas periódicas detectadas na figura 5.5, da associação simbólica definida em (5.49) e definindo $s \equiv z/\beta$, chega-se às seguintes expressões para a função zeta de Γ :

- Para $\sigma = 0,00$:

$$\frac{1}{\zeta_{30}(z)} = 1 - s^{19} - s^{20} - s^{21} - s^{25} - 2s^{28} - s^{29} - 3s^{30}. \quad (5.54)$$

- Para $\sigma = 0,50$:

$$\frac{1}{\zeta_{30}(z)} = 1 - s^{18} - 2s^{19} - s^{27} - s^{28} - 3s^{29} - 2s^{30}. \quad (5.55)$$

- Para $\sigma = 1,00$:

$$\frac{1}{\zeta_{30}(z)} = 1 - s^{16} - 2s^{27} - 2s^{28} - 5s^{29} - 3s^{30}. \quad (5.56)$$

Os menores zeros reais e positivos das equações (5.54), (5.55) e (5.56), obtidos pelo método da bissecção, substituídos em (5.51) fornecem as seguintes taxas de escape $\gamma(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \gamma(0,00) &= 0,003722 \\ \gamma(0,50) &= 0,001805 \\ \gamma(1,00) &= 0,000032. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Esses valores devem ser comparados aos obtidos pelo ajuste do decaimento exponencial na figura 5.3. Vê-se que a expansão (5.53) fornece resultados bastante satisfatórios considerando-se apenas poucos termos. Esse mesmo procedimento foi realizado para outros conjuntos de parâmetros e os valores obtidos estão indicados na figura 5.6. Os símbolos abertos representam os valores de γ calculados na figura 5.4, para os alcances σ indicados na legenda. Para efeito de comparação visual para os três valores de σ , a taxa de escape γ foi indicada como uma função do maior expoente de Lyapunov transversal, h_1 , sendo a dependência com ε implícita. Percebe-se que a expansão em ciclos primos converge para o valor numericamente calculado de γ em todas as situações.

Como foi argumentado na derivação da expansão (3.55), esse resultado só é possível devido à existência de ciclos de período p arbitrário, para que se possa escrever qualquer período como uma composição de períodos primos e, assim, rearranjar os somatórios que se estendem ao infinito. Ou seja, (3.55) só se aplica se as órbitas periódicas instáveis formarem um conjunto

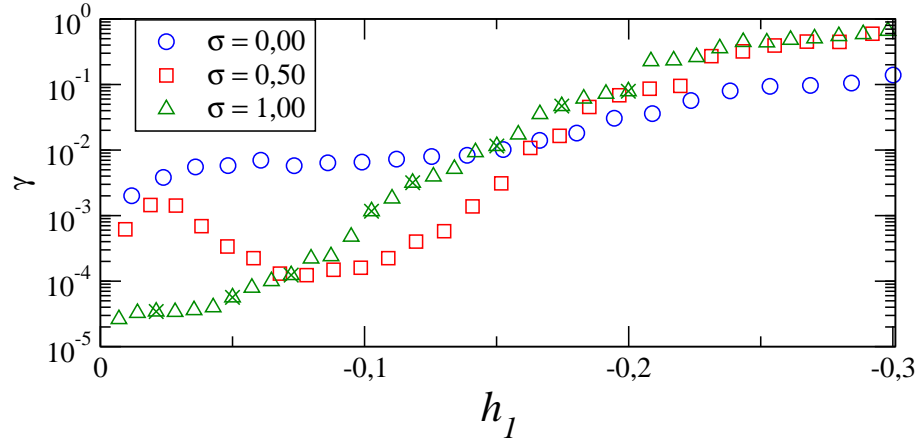


Figura 5.6: A taxa de escape γ em função do maior expoente de Lyapunov transversal de \mathcal{S} , para $L = 15$ e $\beta = 1, 1$, para os alcances σ indicados na legenda. Os símbolos abertos referem-se à simulação da figura 5.4 e o símbolo “X” ao logaritmo neperiano do menor zero da função zeta de Γ para os parâmetros indicados.

denso. Como (5.57) fornece uma evidência contundente que (5.50) se aplica, a existência da sela caótica $\mathcal{G} \subset \Gamma$ está verificada.

Os resultados da figura 5.6 sugerem que a análise apresentada é típica em todo o espaço de parâmetros, isto é, que para todo par de parâmetros (ε, σ) em que \mathcal{S} é globalmente estável, o tempo de sincronização é determinado pelo transiente caótico em uma sela caótica $\mathcal{G} \subset \Gamma$. Uma vez que a rede é hiperbólica, esse argumento pode ser feito formal, pois a hiperbolicidade implica estabilidade estrutural, isto é, em sistemas hiperbólicos, qualquer perturbação infinitesimal nos parâmetros que regem a dinâmica não resulta em bifurcações e nem em crises. Portanto, a sela caótica \mathcal{G} verificada para um dado par de parâmetros⁷, não “desaparece” para qualquer deslocamento infinitesimal nesses parâmetros. Partindo de um ponto (ε, σ) , é possível varrer todo o plano $\varepsilon \times \sigma$ com deslocamentos infinitesimais. Logo, a sela caótica \mathcal{G} existe para *todos* (ε, σ) tais que \mathcal{S} é globalmente estável.

⁷Contidos na região em que \mathcal{S} é globalmente estável.

6 Conclusões

A teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares e, mais especificamente, o estudo do comportamento caótico, estão presentes em praticamente todos os ramos da ciência contemporânea. Isso porque sistemas caóticos apresentam comportamentos universais observados nas mais diversas situações, especialmente em sistemas complexos de alta dimensionalidade. Uma realização matemática importante de tais sistemas é dada por redes de mapas caóticos acoplados, pois podem ser obtidas a partir da simplificação das equações fundamentais que regem a natureza e facilitam o tratamento analítico/numérico. Ou seja, essas redes formam a conexão entre a dinâmica não-linear desenvolvida para modelos matemáticos de baixa dimensionalidade e problemas físicos caracterizados por sistemas complexos.

Nessa dissertação, foi dado um passo para essa conexão, através da aplicação da teoria das órbitas periódicas em uma rede de mapas de Bernoulli acoplados. Nos capítulos 2 e 3, a teoria matemática desenvolvida para sistemas caóticos foi exposta de maneira a fundamentar a análise apresentada nos capítulos subsequentes. Primeiramente, as quantidades características de sistemas caóticos foram apresentadas e, quando possível, exemplificadas utilizando-se o mapa de Bernoulli, sendo que esses resultados contribuem para a análise da rede como um todo, uma vez que a dinâmica na variedade de sincronização é determinada por esse mapa. A fundamentação teórica referente à teoria das órbitas periódicas foi reservada ao capítulo 3. Esta dissertação pode tanto ser vista como um estudo da sincronização de caos em redes de mapas acoplados *via* teoria das órbitas periódicas, como um estudo da teoria das órbitas periódicas com aplicação na sincronização de caos. Como em todo atrator caótico ou sela caótica existe um conjunto denso, infinito e contável de órbitas periódicas instáveis, a teoria das órbitas periódicas pode ser aplicada em todos os sistemas em que se observa caos e, portanto, fornece uma alter-

nativa poderosa à análise desses sistemas.

No capítulo 4, foram exploradas as condições para a sincronização de caos e determinadas as imposições à dinâmica local e à topologia do acoplamento para que o desenvolvimento teórico, bem como o ferramental exposto, nos capítulos 2 e 3 fossem formalmente válidos. Introduziu-se o conceito de distância ao estado sincronizado de modo a quantificar a sincronização. A distância geométrica entre uma trajetória no espaço de fase e a variedade de sincronização foi utilizada devido ao apelo geométrico e por determinar, unicamente, a sincronização.

O estudo da sincronização de caos em redes hiperbólicas surge, então, como uma aplicação da teoria das órbitas periódicas instáveis em um sistema caótico de alta dimensionalidade. Como exemplo concreto, utilizou-se uma rede de mapas de Bernoulli linearmente acoplados, sendo o acoplamento simétrico e periódico, de tal modo que a interação entre os sítios é inversamente proporcional à distância entre eles, segundo uma lei de potência. Essa forma de interação engloba os casos limites, acoplamento global e primeiros vizinhos, e permite quantificar a influência da conectividade entre os sítios na sincronização.

A observação de sincronização em trajetórias típicas de uma rede requer a análise da estabilidade do estado sincronizado. Essa análise foi dividida em duas partes: a estabilidade local do estado sincronizado, caracterizada pelos expoentes de Lyapunov transversais, e a estabilidade global desse estado, determinada em termos da medida natural do sistema. O espectro de Lyapunov, das trajetórias sincronizadas ou não, foi determinado fazendo-se uso das simetrias da rede e do fato que a dinâmica local é linear por partes. Dessa análise foi possível determinar os parâmetros críticos que caracterizam a transição de estabilidade do estado sincronizado, dados pela nulidade de pelo menos um expoente de Lyapunov transversal desse estado. O principal resultado desse capítulo, referente à estabilidade global do estado sincronizado, pode ser expressado no seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja $g : \omega \rightarrow \omega$, $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$, um mapa caótico que satisfaz o axioma A. Seja $F : \Omega \rightarrow \Omega$*

uma rede de L mapas \mathbf{g} linearmente acoplados, tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

sendo $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \doteq [\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(0)}) \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(1)}) \quad \dots \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(L-1)})]^T$ e $\mathbf{x} \doteq [\mathbf{y}^{(0)} \quad \mathbf{y}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(L-1)}]^T$. A matriz \mathbf{A} é tal que $\Omega = \omega^L$ possui estrutura hiperbólica. Seja ainda

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{y}^{(l)} = \mathbf{y}^{(m)} \forall l, m \right\}$$

a variedade de sincronização da rede. Se \mathcal{S} é transversalmente estável com respeito a perturbações infinitesimais, então \mathcal{S} é globalmente estável em Ω .

A prova, exposta na seção 4.5, foi dada em termos da teoria das órbitas periódicas. Mais especificamente, a expressão que relaciona a medida natural de um conjunto com os autovalores instáveis dos pontos periódicos imersos nesse conjunto foi utilizada para determinar a medida natural do estado sincronizado. Verificou-se que, quando \mathcal{S} é localmente estável, ou seja, quando *todos* os expoentes de Lyapunov transversais são negativos, tal expressão resulta em medida unitária para o estado sincronizado. Portanto, todas as trajetórias típicas da rede finalmente sincronizam. Esse resultado é válido para toda a classe de redes hiperbólicas, da qual a rede estudada faz parte, como foi demonstrado na seção 4.1.

Os casos em que se consegue provar a estabilidade global do estado sincronizado são raros, pois tipicamente não é possível verificar a estrutura hiperbólica para o espaço de fase. Mas a estabilidade local é relativamente fácil de se analisar, uma vez que a dinâmica na variedade de sincronização é invariante e normalmente dada por um sistema de baixa dimensionalidade. Costuma-se, portanto, determinar a estabilidade local, ou linear, do estado sincronizado e supor que essa implique sincronização das trajetórias típicas da rede. De maneira geral, isso é observado em experimentos numéricos envolvendo diferentes topologias e dinâmicas locais. Para isso, sorteiam-se diversas condições iniciais típicas da rede e, através da evolução temporal numérica das trajetórias, verifica-se ou não se o estado sincronizado é assintoticamente alcançado. Deve-se, portanto, evoluir o sistema até que esse finalmente atinja um estado estacionário.

O tempo necessário para que uma trajetória alcance o estado sincronizado, dito tempo de sincronização, é uma quantidade relevante no estudo de redes de mapas acoplados. Caso a rede represente um fenômeno físico, por exemplo, este seria o tempo necessário para que o experimento relaxasse ao comportamento espacialmente regular. No capítulo 5, o tempo de sincronização foi investigado em detalhes, no qual foram expostos e discutidos os critérios utilizados para inferir ou não a sincronização nas simulações numéricas. Foi mostrado que, quando o sistema sincroniza, as trajetórias podem apresentar altos tempos de sincronização. Isso pode prejudicar a verificação numérica da sincronização: basta que o tempo de sincronização esperado para trajetórias típicas da rede seja maior que o tempo de observação utilizado no experimento numérico. Assim, a determinação da estabilidade global do estado sincronizado de maneira indireta, através da verificação numérica da sincronização de trajetórias típicas, pode levar a resultados errados.

Como foi calculado na seção 5.1, o tempo de sincronização é função da intensidade e do alcance do acoplamento e as trajetórias que finalmente alcançam o estado sincronizado comportam-se de maneira errática no espaço de fase mesmo antes da sincronização. A aperiodicidade das trajetórias, juntamente com a positividade de um dos expoentes de Lyapunov verificada no capítulo 4, foram utilizadas para argumentar a existência de uma sela caótica disjunta do estado sincronizado. Assim, o tempo de sincronização seria associado ao transiente caótico das trajetórias da rede iniciadas na sela caótica.

Uma quantidade intrínseca da uma sela caótica é a taxa de escape, que rege o decaimento exponencial do número de trajetórias que permanecem na sela com a evolução temporal do sistema. Numericamente, esse decaimento exponencial foi observado para a rede estudada, sendo típico para todos os parâmetros utilizados – como foi apresentado na seção 5.2. Esse resultado corrobora a hipótese da existência de uma sela caótica. A caracterização do tempo de sincronização como um transiente caótico permitiu que esse tempo fosse determinado em termos de uma propriedade fundamental do sistema: a taxa de escape da sela caótica. Verificou-se que o tempo de sincronização esperado é igual à vida média da sela, dada pelo recíproco da taxa de escape.

As propriedades métricas e topológicas da sela caótica, como os expoentes de Lyapunov e as entropias, podem ser obtidas através de experimentos numéricos envolvendo cálculos no transiente, ou seja, médias temporais sobre as trajetórias típicas enquanto permanecem no estado dessincronizado. Na seção 5.3, uma abordagem mais rigorosa foi utilizada: a topologia da sela caótica foi investigada através da determinação de suas órbitas periódicas instáveis. Devido à forma da rede, uma expressão analítica para a localização de todos os seus pontos periódicos pôde ser derivada. Tal expressão envolve os componentes da matriz de acoplamento e um conjunto de vetores que representam a descontinuidade dos mapas de Bernoulli. Verificou-se que esses conjuntos fornecem uma maneira sistemática de se associar um símbolo a cada órbita periódica, ou seja, a solução dos pontos periódicos da rede define uma partição geratriz do espaço de fase. Para cada órbita periódica existe um, e apenas um, símbolo e cada símbolo representa, no máximo, uma órbita periódica. Embora, em princípio, fosse possível encontrar todos os pontos periódicos da rede a partir dessa expressão, outra abordagem foi utilizada, devido à existência de um número enorme, mas finito, de símbolos que não estão associados a órbitas periódicas.

A localização dos pontos periódicos da sela caótica foi então obtida através do método da transformação de estabilização, exposto em 3.3. Como todos os pontos do espaço de fase possuem os mesmos coeficientes de estabilidade, dados pelos autovalores da matriz Jacobiana, a implementação numérica desse método é simplificada, pois a mesma transformação estabiliza todos os pontos periódicos da rede. Assim, as órbitas de um dado período foram detectadas a partir da evolução temporal de um conjunto de condições iniciais típicas do sistema transformado. A disposição dessas órbitas no espaço de fase determinou a topologia da sela caótica responsável pelos longos tempos de sincronização observados. Na seção 5.3, verificou-se qualitativamente que as infinitas órbitas periódicas contidas na sela caótica suportam o comportamento errático das trajetórias no transiente – o fato observado de que as trajetórias próximas ao estado sincronizado podem se afastar, apesar da estabilidade desse estado, pôde ser facilmente explicado a partir do sombreamento das trajetórias típicas por órbitas periódicas instáveis contidas na sela.

A conexão formal entre as observações qualitativas sobre o tempo de sincronização e um transiente caótico, da seção 5.3, e a teoria das órbitas periódicas, apresentada no capítulo 3, foi obtida através da expansão em ciclos primos realizadas na seção 5.4. Esse resultado, um dos principais dessa dissertação, foi utilizado para contornar a requisição de $p \rightarrow \infty$ na seção 3.2. De posse das órbitas periódicas detectadas numericamente e da especificação simbólica unívoca dada na seção 5.3, a taxa de escape da sela caótica foi determinada a partir do menor zero da função zeta. Embora a expansão em ciclos primos realizada seja particular para cada caso estudado, observou-se que o resultado obtido concorda com as simulações numéricas realizadas. Como essa expansão só é possível devido à existência de infinitas órbitas periódicas instáveis contidas na sela caótica, esse resultado encerra a comprovação da hipótese feita no capítulo 1: o tempo de sincronização em redes de mapa de Bernoulli acoplados pode ser extremamente alto devido ao transiente associado à existência de uma sela caótica densa no espaço de fase, disjunta ao estado sincronizado.

Os resultados obtidos pela expansão em ciclos primos, juntamente com a hiperbolicidade da rede, foram suficientes para verificar, formalmente, a existência de um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis em Γ , ou seja, a existência da sela caótica $\mathcal{S} \subset \Gamma$. Embora em toda a dissertação o número de sítios acoplados tenha sido fixado em $L = 15$, espera-se que os resultados se apliquem para outros tamanhos de rede, uma vez que a sincronização é garantida pelos resultados do capítulo 4, seção 4.5. O método de transformação de estabilização pode ser facilmente implementado para L diferentes e órbitas de período baixo são sempre localizadas em Γ , fornecendo um indicativo da existência da sela caótica também nesses casos.

Bibliografia

- 1 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983. 459 p.
- 2 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An introduction to dynamical systems*. New York: Springer-Verlag, 2000. 603 p.
- 3 JOSE, J. V.; SALETAN, E. J. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 696 p.
- 4 GULICK, D. *Encounter with Chaos*. Now York: McGraw-Hill, 1992. 308 p.
- 5 TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic Dynamics: an Introduction Based on Classical Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 393 p.
- 6 ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, p. 617–656, 1985.
- 7 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors. *Phys. Rev. A*, v. 37, p. 1711–1724, 1988.
- 8 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993.
- 9 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L.; JOHNSON, G. A.; MAR, D. J.; HEAGY, J. F. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, v. 7, p. 520, 1997.
- 10 CENCINI, M.; TORCINI, A. Nonlinearly driven transverse synchronization in coupled chaotic systems. *Physica D*, v. 208, p. 191–208, 2005.
- 11 CVITANOVIC, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. *Chaos: Classical and Quantum*. Niels Bohr Institute, Copenhagen: [s.n.], 2008.
- 12 SANTOS, J. P. d. O. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 198 p.
- 13 MILLER, J. R.; YORKE, J. A. Finding all periodic orbits of maps using newton methods: sizes of basins. *Physica D*, v. 135, p. 195–211, 2000.
- 14 SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. E*, v. 57, p. 2739–2746, 1998.
- 15 PINGEL, D.; SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. Stability transformation: a tool to solve nonlinear problems. *Physics Reports*, v. 400, p. 67–148, 2004.
- 16 ANTENEODO, C.; PINTO, S. E. d. S.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Phys. Rev. E*, v. 68, p. 045202(R), 2003.

- 17 PINTO, S. E. d. S.; LUNARDI, J. T.; SALEH, A. M.; BATISTA, A. M. Some aspects of the synchronization in coupled maps. *Phys. Rev. E*, v. 72, p. 037206(4), 2005.
- 18 ANTENEODO, C.; PINTO, S. E. d. S.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Erratum: Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Phys. Rev. E*, v. 69, p. 029904, 2004.
- 19 GRAY, R. M. Toeplitz and circulant matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, v. 2, p. 155–239, 2006.

APÊNDICE A – Matrizes circulantes

Neste apêndice, os autovetores e autovalores de uma matriz circulante serão determinados segundo a exposição apresentada em ⁽¹⁹⁾.

Uma matriz \mathbf{C} , $L \times L$, é dita circulante se cada linha for composta de um deslocamento à direita da linha anterior, ou seja,

$$\mathbf{C} \doteq \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{L-1} \\ C_{L-1} & C_0 & C_1 & \cdots & C_{L-2} \\ C_{L-2} & C_{L-1} & C_0 & \cdots & C_{L-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Essa forma de matriz é um caso mais especial de matrizes ditas “toeplitz” e permitem o cálculo de diversas propriedades de maneira simples e elegante, como a determinação do espectro de autovalores e todos seus autovetores. Matrizes da forma (A.1) estão presentes em aplicações envolvendo transformadas discretas de Fourier, por exemplo.

Os autovalores σ_k associados aos autovetores \mathbf{c}_k de \mathbf{C} são dados pela solução de

$$\mathbf{C}\mathbf{c}_k = \sigma_k\mathbf{c}_k. \quad (\text{A.2})$$

Escrevendo o j -ésimo componente de \mathbf{c}_k como $c_k^{(j)}$, tem-se

$$\sum_{l=0}^{L-1} [\mathbf{C}]_{jl} c_k^{(l)} = \sigma_k c_k^{(j)}, \quad (j = 0, 1, \dots, L-1) \quad (\text{A.3})$$

na qual $[\mathbf{C}]_{jl}$ representa o componente da linha j e coluna l da matriz \mathbf{C} . Por construção,

$$[\mathbf{C}]_{jl} = \begin{cases} C_{l-j} & \text{se } l \geq j \\ C_{l-j+L} & \text{se } l < j \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

portanto, a expressão (A.3) pode ser rearranjada do seguinte modo:

$$\sum_{l=0}^{j-1} C_{L-j+l} c_k^{(l)} + \sum_{l=j}^{L-1} C_{l-j} c_k^{(l)} = \sigma_k c_k^{(j)} \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_{l=L-j}^{L-1} C_l c_k^{l-(L-j)} + \sum_{l=0}^{L-1-j} C_l c_k^{(l+j)} = \sigma_k c_k^{(j)}, \quad (\text{A.6})$$

na qual, novamente, $j = 0, 1, \dots, L-1$ e os limites dos somatórios foram alterados. A solução de (A.6) pode ser obtida fazendo-se $c_k^{(j)} = \rho_k^j$ e observando-se a arbitrariedade na forma dos autovalores σ_k . Essa escolha é induzida pela forma linear do sistema (A.6) e sua validade é garantida por substituição:

$$\begin{aligned} \sum_{l=L-j}^{L-1} C_l \rho_k^{l-L+j} + \sum_{l=0}^{L-1-j} C_l \rho_k^{l+j} &= \sigma_k \rho_k^j \quad (\div \rho_k^j) \\ \rho_k^{-L} \sum_{l=L-j}^{L-1} C_l \rho_k^l + \sum_{l=0}^{L-1-j} C_l \rho_k^l &= \sigma_k. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Escolhendo-se ρ_k^{-L} como uma das L -ésimas raízes complexas da unidade, i.e.,

$$\rho_k^{-L} = \left(e^{-(2\pi i)k/L} \right)^{-L} = 1,$$

tem-se os autovalores de \mathbf{C}

$$\sigma_k = \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{-(2\pi i) \frac{kl}{L}}, \quad (\text{A.8})$$

associados aos autovetores

$$c_k^{(j)} = \frac{e^{-(2\pi i) \frac{kj}{L}}}{\sqrt{L}}, \quad (\text{A.9})$$

sendo o termo $L^{-1/2}$ colocado *ad-hoc* para que $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_s = \delta_{ks}$, ou seja, para que os autovetores sejam normalizados. Uma vez que os autovalores (A.8) e os autovetores (A.9) são soluções de (A.6), o espectro de autovalores é unicamente determinado.